

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 2

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Sei $r \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es gibt $a_{r1}, \dots, a_{rr} \in \mathbb{Q}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^n k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + \sum_{i=1}^r a_{ri} n^i$

2.) Seien $a_1, \dots, a_n$ nicht negative reelle Zahlen. Man beweise für $a := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ die Abschätzung $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq a^n$

3.) Setze $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ für $n = 1, 2, \dots$

i.) $a_n < a_{n+1}$

Zuerst wird a_n umgeformt:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ a_n + 1 &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n < a_{n+1}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n &< \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n &< \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ 1 &< \left[\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right]^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ 1 &< \left(\frac{(n+2) \cdot n}{(n+1) \cdot (n+1)}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ 1 &< \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ 1 &< \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ 1 &< \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ 1 &< \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

In die Bernoulli-Ungleichung $(1+xn) \leq (1+x)^n$ kann man dann $x := -\frac{1}{(n+1)^2}$ einsetzen:

$$1 + n \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2} \right) \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n$$

Und das ganze auf beiden Seiten mit $\frac{n+2}{n+1}$ multiplizieren:

$$1 \leq \left[1 + n \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2} \right) \right] \cdot \frac{n+2}{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

Wenn nun die linke Seite größer oder gleich 1 ist, so gilt das gesagte.

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left[1 + n \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2} \right) \right] \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \left[1 - \frac{n}{(n+1)^2} \right] \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)^2}{(n+1)^3} - \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)^2 - n \cdot (n+2)}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n^2 + 2n + 1) - n^2 - 2n}{(n+1)^3} \\ &= \frac{n^3 + 2n^2 + n + 2n^2 + 4n + 2 - n^2 - 2n}{(n+1)^3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(n+1)^3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} \\ &= 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

Damit gilt $1 \leq 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$.

Damit gilt $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Damit gilt $a_n < a_{n+1}$

q.e.d.

ii.) $b_n > b_{n+1}$

Zuerst wird b_n umgeformt:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ b_n + 1 &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $b_n > b_{n+1}$ gilt.

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ \left(\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}\right) &> 1 \\ \left(\frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) &> 1 \\ \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) &> 1 \\ \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n} - \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) &> 1 \\ \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) &> 1 \end{aligned}$$

In die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq (1+xn)$ kann man dann $x := -\frac{1}{n^2+2n}$ einsetzen:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n}\right) \cdot (n+1)$$

Und das ganze auf beiden Seiten mit $\frac{n+1}{n+2}$ multiplizieren:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \geq \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n}\right) \cdot (n+1)\right] \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

Wenn die rechte Seite größer oder gleich 1 ist gilt das gesagte.

$$1 < \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n}\right) \cdot (n+1)\right] \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + n + 1 - \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \left(n + 2 - \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= (n+2) \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+1}{n^2+2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{n+2} - \frac{(n+1)^2}{(n^2+2n) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{(n^2+2n)(n+2)(n+1)}{(n^2+2n)(n+2)} - \frac{(n+1)^2}{(n^2+2n) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{(n^2+2n)(n+2)(n+1) - (n+1)^2}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= \frac{(n^2+2n)(n+2)(n+1) - n^2 - 2n - 1}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= \frac{(n^2+2n)(n+2)(n+1)}{(n^2+2n)(n+2)} - \frac{n^2+2n}{(n^2+2n)(n+2)} - \frac{1}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= n+1 - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= n+1 - \frac{(n^2+2n)}{(n^2+2n)(n+2)} - \frac{1}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= n+1 - \frac{n^2+2n-1}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= n+1 - \frac{-(n^2-2n+1)}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= n+1 - \frac{-(n-1)^2}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= n+1 + \frac{(n-1)^2}{(n^2+2n)(n+2)}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\left[1 + \left(1 - \frac{1}{n^2+2n}\right) \cdot (n+1)\right] \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) > 1$

Damit gilt $\left(1 - \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} > 1$

Damit gilt $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$

Damit gilt $b_n > b_{n+1}$

q.e.d.

iii.) $a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$ für $n > 1$

Behauptung: $a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ gilt.

Beweis:

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lässt sich schreiben als $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$. Für jedes Summenglied gilt dann

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot n^k} \\
 &= \frac{1 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot 1 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot n^k} \\
 &= \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{k! n^k} \\
 &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n^k} \\
 &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}
 \end{aligned}$$

Dieser Bruch lässt sich nun schreiben als

$$= \frac{1}{k!} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(n-k+i)}{n}$$

Da hier $(n-k+i) \leq n$ gilt $\frac{(n-k+i)}{n} \leq 1$

Damit gilt $\prod_{i=1}^k \frac{(n-k+i)}{n} < 1, \quad \forall k > 1$

Damit gilt $\frac{1}{k!} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(n-k+i)}{n} < \frac{1}{k!}, \quad \forall k > 1$

Damit gilt $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Damit gilt $a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

q.e.d.

Behauptung: $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$ gilt, da $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < b_n$ gilt und $b_n < 3$ für alle $n > 2$.

Beweis: Oehm, ja.... macht mal.

4.) Für positive Zahlen a, b definiert man $A(a, b) := \frac{a+b}{2}$, $G := \sqrt{ab}$, $H := \frac{2ab}{a+b}$. Man beweise $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$

Gleichheit gilt für $a = b$.

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{a+b} &\leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\ \Rightarrow \frac{2aa}{a+a} &\leq \sqrt{aa} \leq \frac{a+a}{2} \\ \frac{2a^2}{2a} &\leq \sqrt{a^2} \leq \frac{2a}{2} \\ a &= a = a \end{aligned}$$

Um zu beweisen, daß $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$ gilt, genügt es zu zeigen, daß $H(a, b) \leq G(a, b)$ und $G(a, b) \leq A(a, b)$ gelten.

$$H(a, b) \leq G(a, b)$$

Der Fall der Gleichheit wurde bereits betrachtet, somit auch $a := 0$ und $b := 0$. Für alle anderen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{a+b} &\leq \sqrt{ab} \\ \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} &\leq ab \\ \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} &\leq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} ab \\ 4a^2b^2 &\leq (a^2 + 2ab + b^2)ab \\ 4a^2b^2 &\leq 2a^2b^2 + ab^3 + a^3b \end{aligned}$$

Nun muß man zeigen, daß $2a^2b^2 \leq ab^3 + a^3b$ gilt.

Für den Fall, daß $a > b$ gilt, daß die Differenz $x = b - a$ größer ist als 0. b läßt sich damit schreiben als $b = a + x$.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2a^2(a+x)^2 &\leq a(a+x)^3 + a^3(a+x) \\ 2a^2(a^2 + 2ax + x^2) &\leq a(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3) + a^4 + a^3x \\ 2a^4 + 4a^3x + 2a^2x^2 &\leq a^4 + 3a^3x + 3a^2x^2 + ax^3 + a^4 + a^3x \\ 2a^4 + 4a^3x + 2a^2x^2 &\leq 2a^4 + 4a^3x + 3a^2x^2 + ax^3 \\ 0 &\leq a^2x^2 + ax^3 \end{aligned}$$

Somit gilt nur für den Fall $x = 0$ Gleichheit. Da b aber $b = a + x$ ist, gilt Gleichheit somit ebenfalls nur bei $b = a$.

Für den Fall $b > a$ läuft der Beweis analog ab. a läßt sich dann schreiben als $a = b + x$.

$$G(a, b) \leq A(a, b)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \\ ab &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ ab &\leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ ab &\leq \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} \\ ab &\leq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2}\end{aligned}$$

Nun muß man zeigen, daß $\frac{ab}{2} \leq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$ gilt.

$$\begin{aligned}\frac{ab}{2} &\leq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \\ ab &\leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\end{aligned}$$

Für den Fall, daß $a > b$ gilt, daß die Differenz $x = b - a$ größer ist als 0. b läßt sich damit schreiben als $b = a + x$.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}a(a+x) &\leq \frac{a^2}{2} + \frac{(a+x)^2}{2} \\ a^2 + ax &\leq \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 + 2ax + x^2}{2} \\ a^2 + ax &\leq \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{2ax}{2} + \frac{x^2}{2} \\ a^2 + ax &\leq a^2 + ax + \frac{x^2}{2} \\ 0 &\leq x^2\end{aligned}$$

Somit gilt nur für den Fall $x = 0$ Gleichheit. Da b aber $b = a + x$ ist, gilt Gleichheit somit ebenfalls nur bei $b = a$.

Für den Fall $b > a$ läuft der Beweis analog ab. a läßt sich dann schreiben als $a = b + x$.