

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 3

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Die Folge der Fibonacci-Zahlen wird induktiv definiert durch $a_0 = a_1 := 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$.

a.) Man bestimme die ersten 10 Folgenglieder.

Zunächst einmal wird die Definition für die Fibonacci-Zahlen von a_{n+2} nach a_n umgeformt:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &:= a_{n+1} + a_n \\ \Leftrightarrow a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann die folgende Tabelle:

n	$a_{n-2} + a_{n-1}$	a_n
0	—	1
1	—	1
2	$1 + 1 =$	2
3	$1 + 2 =$	3
4	$2 + 3 =$	5
5	$3 + 5 =$	8
6	$5 + 8 =$	13
7	$8 + 13 =$	21
8	$13 + 21 =$	34
9	$21 + 34 =$	55
10	$34 + 55 =$	89

b.) Man zeige für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$, daß $a_n a_{n+k+2} - a_{n+1} a_{n+k+1} = (-1)^n a_k$.

Behauptung: $a_n a_{n+k+2} - a_{n+1} a_{n+k+1} = (-1)^n a_k$ gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

Beweis: per Induktion über n .

Induktionsanfang $A(0)$

$$n := 0$$

$$\begin{aligned} & a_0 a_{0+k+2} - a_1 a_{0+k+1} \\ &= a_0 a_{k+2} - a_1 a_{k+1} \\ &= 1 \cdot a_{k+2} - 1 \cdot a_{k+1} \\ &= a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= a_k = 1 a_k = (-1)^0 a_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsannahme Gilt für n

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned}
 & a_{n+1}a_{n+1+k+2} - a_{n+1+1}a_{n+1+k+1} = \\
 = & a_{n+1}a_{n+k+3} - a_{n+2}a_{n+k+2} \\
 = & a_{n+1}a_{k+3} - (a_{n+1} + a_n)a_{n+k+2} \\
 = & a_{n+1}(a_{n+k+2} + a_{n+k+1}) - (a_{n+1}a_{n+k+2} - a_na_{n+k+2}) \\
 = & a_{n+1}a_{n+k+2} + a_{n+1}a_{n+k+1} - a_{n+1}a_{n+k+2} + a_na_{n+k+2} \\
 = & a_{n+1}a_{n+k+1} - a_na_{n+k+2} \\
 = & (-1) \underbrace{(a_na_{n+k+2} - a_{n+1}a_{n+k+1})}_{\text{nach I.V. } = (-1)^n a_k} \\
 = & (-1)(-1)^n a_k \\
 = & (-1)^{n+1} a_k
 \end{aligned}$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt.

q.e.d.

2.) Die Zahl 4 lässt sich auf fünf verschiedene Weisen als Summe von Einsen und Zweien darstellen: $1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$.

a.) Man gebe eine Rekursionsformel für die Anzahl solcher Darstellungen durch Einsen und Zweien für eine beliebige positive Zahl an und berechne sie im Fall $n = 12$.

Gegeben sei die Menge der Summendarstellungen für $n := 1$ und $n := 2$:

$$\Sigma(1) = \{1\} \quad \Sigma(2) = \{1 + 1, 2\}$$

$n = 1$ lässt sich damit auf eine Art darstellen, $n = 2$ auf zwei Arten.

Da eine Summendarstellung größerer Zahlen entweder mit $1+$ oder $2+$ beginnt, ergeben sich für $\Sigma(n)$ folgende zwei Fälle:

Summe beginnt mit 1 Die Menge aller Summen, die in $\Sigma(n)$ mit $1+$ beginnen sei folgendermaßen definiert:

$$\Sigma_1(n) := \{1 + \sigma \mid \sigma \in \Sigma(n-1)\}$$

In $\Sigma(n-1)$ sind bereits alle möglichen Kombinationen σ enthalten, um $n-1$ darzustellen.

Summe beginnt mit 2 Die Menge aller Summen, die in $\Sigma(n)$ mit 2+ beginnen sei folgendermaßen definiert:

$$\Sigma_2(n) := \{2 + \sigma \mid \sigma \in \Sigma(n-2)\}$$

In $\Sigma(n-2)$ sind bereits alle möglichen Kombinationen σ enthalten, um $n-2$ darzustellen.

Die Teilmengen $\Sigma_1(n)$ und $\Sigma_2(n)$ sind per Konstruktion disjunkt. Für $\Sigma(n)$ ergibt sich somit:

$$\Sigma(n) := \Sigma_1(n) \cup \Sigma_2(n)$$

Ihre Mächtigkeit ist also:

$$|\Sigma(n)| = |\Sigma(n-1)| + |\Sigma(n-2)|$$

Die Mächtigkeit der Menge $\Sigma(12)$ läßt sich rekursiv bestimmen:

n	$ \Sigma(n-1) + \Sigma(n-2) $	$= \Sigma(n) $
1	—	1
2	—	2
3	1 + 2	= 3
4	2 + 3	= 5
5	3 + 5	= 8
6	5 + 8	= 13
7	8 + 13	= 21
8	13 + 21	= 34
9	21 + 34	= 55
10	34 + 55	= 89
11	55 + 89	= 144
12	89 + 144	= 233

Die Zahl 12 läßt sich somit auf 233 verschiedene Arten als Summe aus Einsen und Zweien darstellen.

b.) Welche Anzahl ergibt sich für $n = 12$, wenn man zusätzlich auch Dreien zur Darstellung zuläßt?

Läßt man zusätzlich Dreien bei der Summenbildung zu, so muß die Rekursionsbasis neu berechnet werden, da sich $n = 3$ dann auf vier verschiedene Arten darstellen läßt.

$$\Sigma'(3) = \{1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1, 3\}$$

$n = 1$ läßt sich weiterhin nur auf eine Art ausdrücken, $n = 2$ auf zwei:

$$\Sigma'(1) := \Sigma(1) \quad \Sigma'(2) := \Sigma(2)$$

Für die Menge der Summen in $\Sigma'(n)$ ergeben sich jetzt drei Fälle:

Summe beginnt mit 1 Die Menge aller Summen in $\Sigma'(n)$ die mit 1+ beginnen sei folgendermaßen definiert:

$$\Sigma'_1(n) := \{1 + \sigma \mid \sigma \in \Sigma'(n-1)\}$$

In $\Sigma'(n-1)$ sind bereits alle möglichen Kombinationen σ enthalten, um $n-1$ darzustellen.

Summe beginnt mit 2 Die Menge aller Summen in $\Sigma'(n)$ die mit 2+ beginnen sei folgendermaßen definiert:

$$\Sigma'_2(n) := \{2 + \sigma \mid \sigma \in \Sigma'(n-2)\}$$

In $\Sigma'(n-2)$ sind bereits alle möglichen Kombinationen σ enthalten, um $n-2$ darzustellen.

Summe beginnt mit 3 Die Menge aller Summen in $\Sigma'(n)$ die mit 3+ beginnen sei folgendermaßen definiert:

$$\Sigma'_3(n) := \{3 + \sigma \mid \sigma \in \Sigma'(n-3)\}$$

In $\Sigma'(n-3)$ sind bereits alle möglichen Kombinationen σ enthalten, um $n-3$ darzustellen.

Die Teilmengen $\Sigma'_1(n)$, $\Sigma'_2(n)$ und $\Sigma'_3(n)$ sind per Konstruktion disjunkt. Für $\Sigma'(n)$ ergibt sich somit:

$$\Sigma'(n) := \Sigma'_1(n) \dot{\cup} \Sigma'_2(n) \dot{\cup} \Sigma'_3(n)$$

Ihre Mächtigkeit ist also:

$$|\Sigma'(n)| = |\Sigma'(n-1)| + |\Sigma'(n-2)| + |\Sigma'(n-3)|$$

Die Mächtigkeit der Menge $\Sigma'(12)$ läßt sich rekursiv bestimmen:

n	$ \Sigma(n-1) + \Sigma(n-2) + \Sigma(n-3) $	$= \Sigma(n) $
1	—	1
2	—	2
3	—	4
4	$1 + 2 + 4$	$= 7$
5	$2 + 4 + 7$	$= 13$
6	$4 + 7 + 13$	$= 24$
7	$7 + 13 + 24$	$= 44$
8	$13 + 24 + 44$	$= 81$
9	$24 + 44 + 81$	$= 149$
10	$44 + 81 + 149$	$= 274$
11	$81 + 149 + 274$	$= 504$
12	$149 + 274 + 504$	$= 927$

Die Zahl $n = 12$ läßt sich also auf 927 verschiedene Arten als Summe von Einsen, Zweien und Dreien darstellen.

Folgerung: Für den allgemeinen Fall, daß Summanden zwischen 1 und k zugelassen werden, ergibt sich als Anzahl der Möglichkeiten:

$$|\Sigma(n)| = \sum_{i=1}^k |\Sigma(n-i)|$$

3.) Man zeige, daß im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen die Menge $P = \{x = \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, a \cdot b \in \mathbb{N}\}$ einen Positivitätsbereich bildet.

Sucht man Werte für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}^*$ ergeben sich fünf Fälle.

$$\begin{aligned} a > 0, b > 0 &\implies a \cdot b > 0 \implies a \cdot b \in \mathbb{N} \\ a \leq 0, b > 0 &\implies a \cdot b \leq 0 \implies a \cdot b \notin \mathbb{N} \\ a > 0, b < 0 &\implies a \cdot b < 0 \implies a \cdot b \notin \mathbb{N} \\ a = 0, b < 0 &\implies a \cdot b = 0 \implies a \cdot b \notin \mathbb{N} \\ a < 0, b < 0 &\implies a \cdot b > 0 \implies a \cdot b \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

In allen Fällen gilt außerdem $b^2 > 0$. Damit gilt $\frac{1}{b^2}$.

In den Fällen in denen $a \cdot b \in \mathbb{N}$ gilt, gilt:

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\underbrace{a \cdot b}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{b^2}}_{>0}}_{>0}$$

Damit ist $\frac{a}{b} > 0$.

4.) Man zeige, daß für positive Elemente $x_1, \dots, x_n$ in $\mathbb{Q}$ die folgenden Aussagen richtig sind: Aus $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ folgt $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ und $(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 2^n$. Umgekehrt folgt aus $x_1 + \dots + x_n = n$ die Ungleichung $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1$. Wann gilt jeweils das Gleichheitszeichen?

Behauptung 1: Aus $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ folgt $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.

Beweis: durch Induktion nach n .

Induktionsanfang $A(1)$

$$n := 1.$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1 \quad \checkmark$$

Induktionsannahme Gilt für n

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} &= 1 \\
 \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \cdot x_{n+1} &= 1 \\
 \Rightarrow 1 \cdot x_{n+1} &= 1 \\
 \Rightarrow x_{n+1} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} &\geq n + x_{n+1} \\
 &\geq n + 1
 \end{aligned}$$

Damit wurde die Behauptung 1 gezeigt.

Behauptung 2: Aus $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ folgt $(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) \geq 2^n$

Induktionsannahme $A(1)$

Aus $x_1 = 1$ folgt $(1+x_1) = (1+1) = 2 \geq 2^1 \quad \checkmark$.

Induktionsannahme Gilt für n

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} &= 1 \\
 \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \cdot x_{n+1} &= 1 \\
 \Leftrightarrow 1 \cdot x_{n+1} &= 1 \\
 \Leftrightarrow x_{n+1} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) &\geq 2^n(1+x_{n+1}) \\
 &= 2^n \cdot (1+1) \\
 &= 2 \cdot 2^n \\
 &= 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

Damit wurde die Behauptung 2 gezeigt.

Behauptung 3: Aus $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ folgt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1$.

Beweis: durch Induktion nach n .

Induktionsanfang $A(1)$

$$n := 1$$

$$x_1 = n \Rightarrow n = 1 \quad x_1 \leq 1 \quad \checkmark.$$

Induktionsannahme Gilt für n **Induktionsschritt** $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned} \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{=n} + x_{n+1} &= n + 1 \\ \Rightarrow n + x_{n+1} &= n + 1 \\ \Rightarrow x_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot 1 \\ &= \underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}_{\leq 1 \text{ nach I.A.}} \leq 1 \quad \checkmark. \end{aligned}$$

Damit wurde die Behauptung 3 gezeigt.

Gleichheit gilt, wenn $x_i := 1, \forall i \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= \sum_{i=1}^n 1 = n \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n &= \prod_{i=1}^n 1 = 1^n = 1 \\ (1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) &= \prod_{i=1}^n (1 + 1) = \prod_{i=1}^n 2 = 2^n \end{aligned}$$