

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 4

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Zeigen Sie: Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ hat eine eindeutige Darstellung $n = \sum_{\nu=0}^r a_\nu g^\nu$ mit $a_\nu \in \{0, 1, 2, \dots, g-1\}$

Beweis: Per Induktion über r .

Induktionsanfang $A(0)$

$r := 0$ (Wenn $n < g$)

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\nu=0}^0 a_\nu g^\nu \\ \Leftrightarrow n &= a_0 g^0 \\ \Leftrightarrow n &= a_0 \end{aligned}$$

Damit ist das n eindeutig bestimmt.

Induktionsvoraussetzung Gilt für alle $r \in \mathbb{N}_0$

Induktionsschritt $A(r) \Rightarrow A(r+1)$

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\nu=0}^{r+1} a_\nu g^\nu \\ \Leftrightarrow n &= \sum_{\nu=1}^{r+1} a_\nu g^\nu + a_0 g^0 \\ \Leftrightarrow n &= \sum_{\nu=1}^{r+1} a_\nu g^\nu + a_0 \\ \Leftrightarrow n &= \sum_{\nu=0}^r a_{\nu+1} g^{\nu+1} + a_0 \\ \Leftrightarrow n &= g \cdot \underbrace{\left(\sum_{\nu=0}^r a_{\nu+1} g^\nu \right)}_{\text{eindeutig nach I.V.}} + a_0 \end{aligned}$$

Die Summe in den Klammern ist eindeutig bestimmt, und wird mit einem Parameter multipliziert, weswegen das Produkt auch eindeutig bestimmt ist. Außerdem ist der Rest der Division $n/g = a_0$ eindeutig bestimmt. Damit ist somit auch ein n eindeutig bestimmt, welches $r+1$ Ziffern zwischen 0 und $g-1$ zur Darstellung benötigt.

■

2.) Für reelle a, b mit $a, b \geq 0$ zeige man $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.

Mit den Eigenschaften des Absolutbetrages:

$$\begin{aligned} |\sqrt{a}| - |\sqrt{b}| &\leq |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|} \\ |\sqrt{a}| - |\sqrt{b}| &\leq \sqrt{|a - b|} \end{aligned}$$

Mit $a, b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |\sqrt{a}|^2 - 2|\sqrt{a}||\sqrt{b}| + |\sqrt{b}|^2 &\leq |a - b| \\ \Leftrightarrow a + b - 2|\sqrt{a}||\sqrt{b}| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

und negativen Werten für y

$$|x - y| \leq |x| + |(-y)| \Leftrightarrow |x - y| \leq |x| + |y|$$

gilt dann

$$\Leftrightarrow a + b - 2|\sqrt{a}||\sqrt{b}| \leq |a| + |b|$$

Da $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a + b - 2|\sqrt{a}||\sqrt{b}| &\leq a + b \\ \Leftrightarrow -2|\sqrt{a}||\sqrt{b}| &\leq 0 \end{aligned}$$

3.) Sei $0 < a < b$. Man definiere induktiv $a_1 := a$, $b_1 := b$ sowie $a_{n+1} := H(a_n, b_n)$, $b_{n+1} := A(a_n, b_n)$. Dabei ist H bzw. A das harmonische bzw. arithmetische Mittel.

a.) Man zeige: $[a_n, b_n]$ liefert eine Intervallschachtelung um $G(a, b) = \sqrt{ab}$. (G geometrisches Mittel).

Wir kennen bereits die Ungleichung (*)

$$H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$$

vom Analysis Übungsblatt 2, Aufgabe 4. Deshalb ist $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) < (b - a)$$

Sei $\varepsilon > 0$: $\exists n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$. Daraus folgt, daß $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung ist.

$$G(a_n, b_n) = \sqrt{a_n b_n} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

Wegen der Ungleichung (*).

b.) Man berechne damit eine rationale Zahl x mit $|\sqrt{s} - x| < \frac{1}{10^3}$.

Wurzeln einer positiven reellen Zahl können sowohl positive als auch negative Ergebnisse haben:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} + x &< \frac{1}{10^3} \implies x - \frac{1}{10^3} < \sqrt{2} \\ +\sqrt{2} - x &< \frac{1}{10^3} \implies \sqrt{2} < \frac{1}{10^3} + x \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die obere bzw. untere Intervallgrenze

$$x - \frac{1}{10^3} < \sqrt{2} < \frac{1}{10^3} + x$$

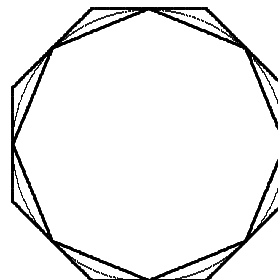
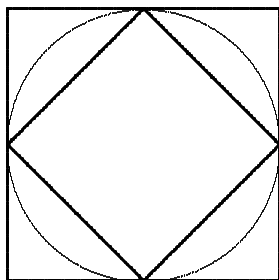
Mit $a := a_1 = 1$, $b := b_1 = 2$ läßt sich somit x näherungsweise berechnen:

$$\begin{aligned} a_1 = x - \frac{1}{10^3} = \frac{10^3 x - 1}{10^3} &\implies 10^3 = 10^3 x - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{10^3 + 1}{10^3} = \frac{1001}{1000} \\ b_1 = \frac{1}{10^3} + x = \frac{1 + 10^3 x}{10^3} &\implies 2 \cdot 10^3 = 10^3 x + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 10^3 - 1}{10^3} = x = \frac{1999}{1000} \\ a_2 = \frac{2a_1 b_1}{a_1 + b_1} = \frac{2 \cdot 2000999}{3000000} &= \frac{4001998}{3000000} \\ b_2 = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{3}{2} \\ a_3 = \frac{\frac{3 \cdot 4001998}{3000000}}{\frac{8501998}{3000000}} = \frac{12005994}{3000000} \\ b_3 = \frac{8501998}{6000000} \\ a_4 = \frac{\frac{2 \cdot 8501998 \cdot 12005994}{6000000 \cdot 8501998}}{\frac{12005994}{8501998} + \frac{8501998}{6000000}} &= \frac{4,001998}{2,829137614} = 1,414564629 \\ b_4 = \frac{\frac{12005994}{8501998} + \frac{8501998}{6000000}}{2} \end{aligned}$$

Nachrechnen ergibt dann:

$$|\sqrt{2} - 1,414564629| = 3,510666269 \cdot 10^4$$

4.) Sei f bzw. F_n die Fläche des dem Einheitskries ein- bzw. umbeschriebenen n -Ecks. Man zeige: $f_{2n} = G(f_n, F_n)$, $F_{2n} = H(f_{2n}, F_n)$.



b.) Man zeige, daß $[a_k, b_k]$ mit $a_k = f_m$, $b_k = F_m$, mit $m = 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung bilden.

Behauptung: $[a_k, b_k]$ bildet eine Intervallschachtelung, da für alle $k \in \mathbb{N}$ $a_k \leq b_k$, $a_k \leq a_{k+1}$ und $b_k \geq b_{k+1}$ gilt.

Beweis: Durch Induktion über k .

Induktionsanfang $A(1)$

$$k := 1$$

$$\text{Damit ist } m = 2^{k+1} = 2^{1+1} = 2^2 = 4.$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram of a circle with an inscribed square of side } a \text{ and radius } r. \\
 \Leftrightarrow \begin{array}{l} f_4 = a^2 \\ (2r)^2 = a^2 + a^2 \\ 4r^2 = 2a^2 \\ 2r^2 = a^2 \\ \Rightarrow f_4 = 2r^2 \end{array} \\
 \Leftrightarrow \text{Diagram of a square with side } 2r \text{ and an inscribed circle of radius } r. \\
 \Leftrightarrow \begin{array}{l} F_4 = (2r)^2 \\ F_4 = 4r^2 \end{array}
 \end{array}$$

Im Einheitskreis gilt $r = 1$. Damit gilt, daß $f_4 < F_4$ ist.

Induktionsvoraussetzung Gilt für k .

Induktionsschritt $A(k) \implies A(k+1)$

Damit ist $m = 2^{k+1+1} = 2 \cdot 2^{k+1} \implies a_k = f_m, b_k = F_m, a_{k+1} = f_{2m}, b_{k+1} = F_{2m}$

$$a_{k+1} \leq b_{k+1}$$

$$\begin{aligned} f_{2m} &\leq F_{2m} \\ \Leftrightarrow f_{2m} &\leq \frac{2f_{2m}F_m}{f_{2m} + F_m} \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{2F_m}{f_{2m} + F_m} \\ \Leftrightarrow f_{2m} + F_m &\leq 2F_m \\ \Leftrightarrow f_{2m} &\leq F_m \\ \Leftrightarrow \sqrt{f_m F_m} &\leq F_m \\ \Leftrightarrow f_m F_m &\leq F_m^2 \\ \Leftrightarrow f_m &\leq F_m \end{aligned}$$

Per Induktionsvoraussetzung gilt $f_m < F_m$, damit gilt $a_k \leq b_k$.

$$a_{k+1} \geq a_k$$

$$\begin{aligned} f_{2m} &\geq f_m \\ \Leftrightarrow \sqrt{f_m F_m} &\geq f_m \\ \Leftrightarrow f_m F_m &\geq f_m^2 \\ \Leftrightarrow F_m &\geq f_m \end{aligned}$$

Per Induktionsvoraussetzung gilt $F_m > f_m$, damit gilt $a_{k+1} \geq a_k$.

$$b_{k+1} \leq b_k$$

$$\begin{aligned} F_{2m} &\leq F_m \\ \frac{2f_{2m}F_m}{f_{2m} + F_m} &\leq F_m \\ \frac{2f_{2m}}{f_{2m} + F_m} &\leq 1 \\ 2f_{2m} &\leq f_{2m} + F_m \\ f_{2m} &\leq F_m \\ \sqrt{f_m F_m} &\leq F_m \\ f_m F_m &\leq F_m^2 \\ f_m &\leq F_m \end{aligned}$$

Per Induktionsvoraussetzung gilt $f_m < F_m$, damit gilt $b_{k+1} \leq b_k$

Wegen $a_k \leq b_k, a_{k+1} \geq a_k, b_{k+1} \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ und ist damit eine Intervallschachtelung.

■