

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 1

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

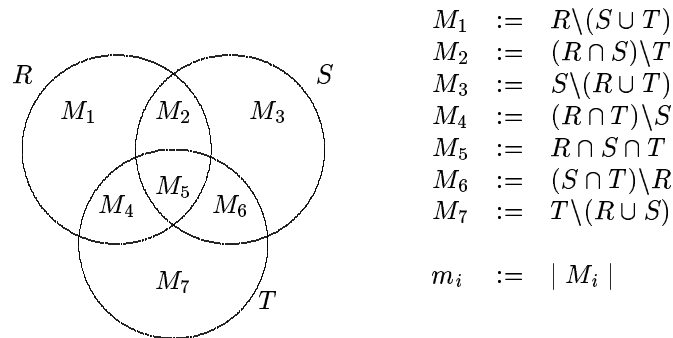
6. April 2004

1.) In einem Wassersportverein betreibt jedes Mitglied mindestens eine der drei Sportarten Rudern, Segeln, Tauchen. Addiert man die Zahl der Ruderer, Segler und Taucher, so erhält man 170. 58 Mitglieder betreiben mindestens zwei Sportarten, und 88 höchstens zwei. Wieviel Mitglieder hat der Verein, und wieviele betreiben alle drei Sportarten?

Sei

- R die Menge der Ruderer
- S die Menge der Segler
- T die Menge der Taucher

Die disjunkten Mengen $M_i, i = 1 \dots 7$ seien wie folgt definiert:



Ihre Mächtigkeit sei mit m_i bezeichnet.

„Addiert man die Zahl der Ruderer, Segler und Taucher, so erhält man 170“

$$\begin{aligned}
 & |R| + |S| + |T| = 170 \\
 \Leftrightarrow & |M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_4 \dot{\cup} M_5| + |M_2 \dot{\cup} M_3 \dot{\cup} M_5 \dot{\cup} M_6| + |M_4 \dot{\cup} M_5 \dot{\cup} M_6 \dot{\cup} M_7| = 170 \\
 \Leftrightarrow & (|M_1| + |M_2| + |M_4| + |M_5|) + (|M_2| + |M_3| + |M_5| + |M_6|) + \\
 & (|M_4| + |M_5| + |M_6| + |M_7|) = 170 \\
 \Leftrightarrow & (m_1 + m_2 + m_4 + m_5) + (m_2 + m_3 + m_5 + m_6) + (m_4 + m_5 + m_6 + m_7) = 170 \\
 \Leftrightarrow & m_1 + 2m_2 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + 2m_6 + m_7 = 170
 \end{aligned}$$

„58 Mitglieder betreiben mindestens zwei Sportarten...“

$$\begin{aligned}
 & |M_2 \dot{\cup} M_4 \dot{\cup} M_5 \dot{\cup} M_6| = 58 \\
 \Leftrightarrow & |M_2| + |M_4| + |M_5| + |M_6| = 58
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_2 + m_4 + m_5 + m_6 = 58$$

„... und 88 höchstens zwei“

$$\begin{aligned} & | M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3 \dot{\cup} M_4 \dot{\cup} M_6 \dot{\cup} M_7 | = 88 \\ \Leftrightarrow & | M_1 | + | M_2 | + | M_3 | + | M_4 | + | M_6 | + | M_7 | = 88 \\ \Leftrightarrow & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = 88 \end{aligned}$$

Zusammenfassend also:

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_2 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + 2m_6 + m_7 &= 170 \\ m_2 + m_4 + m_5 + m_6 &= 58 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 &= 88 \end{aligned}$$

- (i) Damit läßt sich die Anzahl der Personen bestimmen, die alle drei Sportarten ausüben:

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_2 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + 2m_6 + m_7 &= 170 \\ \Leftrightarrow m_2 + m_4 + 3m_5 + m_6 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7) &= 170 \end{aligned}$$

Mit $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = 88$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_2 + m_4 + 3m_5 + m_6 + 88 &= 170 \\ \Leftrightarrow m_2 + m_4 + 3m_5 + m_6 &= 82 \\ \Leftrightarrow 2m_5 + (m_2 + m_4 + m_5 + m_6) &= 82 \end{aligned}$$

Mit $m_2 + m_4 + m_5 + m_6 = 58$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2m_5 + 58 &= 82 \\ \Leftrightarrow 2m_5 &= 24 \\ \Leftrightarrow m_5 &= 12 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Personen, die genau drei Sportarten ausüben ist somit 12.

- (ii) Damit läßt sich die Anzahl der Personen bestimmen, die genau zwei Sportarten ausüben:

Aus den Zwischenergebnissen von (i) weiß man:

$$m_2 + m_4 + 3m_5 + m_6 = 82$$

Außerdem weiß man, daß $m_5 = 12$.

$$\begin{aligned} m_2 + m_4 + 3 \cdot 12 + m_6 &= 82 \\ \Leftrightarrow m_2 + m_4 + 36 + m_6 &= 82 \\ \Leftrightarrow m_2 + m_4 + m_6 &= 46 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Personen, die genau zwei Sportarten ausüben ist somit 46.

(iii) Außerdem läßt sich die Anzahl der Personen bestimmen, die genau eine Sportart ausüben:

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_2 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + 2m_6 + m_7 &= 170 \\ \Leftrightarrow m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + 2m_2 + 2m_4 + 2m_5 + 2m_6 &= 170 \\ \Leftrightarrow m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + 2 \cdot (m_2 + m_4 + m_5 + m_6) &= 170 \end{aligned}$$

Mit $m_2 + m_4 + m_5 + m_6 = 58$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + 2 \cdot 58 &= 170 \\ \Leftrightarrow m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= 54 \end{aligned}$$

Mit $m_5 = 12$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + 12 + m_7 &= 54 \\ \Leftrightarrow m_1 + m_3 + m_7 &= 42 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Personen, die genau eine Sportart ausüben ist somit 42.

(iv) Insgesamt läßt sich somit die Anzahl der Personen in dem Verein bestimmen:

42	Personen, die genau eine Sportart in dem Verein ausüben
+46	Personen, die genau zwei Sportarten in dem Verein ausüben
+12	Personen, die alle drei Sportarten in dem Verein ausüben
100	Personen in dem Verein.

(v) Zum Überprüfen lassen sich außerdem die folgenden Summen bilden:

„58 Mitglieder betreiben mindestens zwei Sportarten...“

46	Personen, die genau zwei Sportarten in dem Verein ausüben
+12	Personen, die alle drei Sportarten in dem Verein ausüben
58	Personen mit mindestens zwei Sportarten

„... und 88 höchstens zwei“

42	Personen, die genau eine Sportart in dem Verein ausüben
+46	Personen, die genau zwei Sportarten in dem Verein ausüben
88	Personen mit höchstens zwei Sportarten.

2.) Bei einem Tennisturnier mit k -Spielern spielt jeder gegen jeden. Es sei S_e die Anzahl der Siege, N_e die Anzahl der Niederlagen des Spielers e . Man beweise $\sum_{e=1}^k S_e^2 = \sum_{e=1}^k N_e^2$

Wenn zwei Gegner Tennis spielen, gewinnt immer genau einer, der andere verliert. Daher gilt

$$\sum_{e=1}^k N_e = \sum_{e=1}^k S_e$$

Jeder Teilnehmer spielt $(k-1)$ Spiele. Damit ergibt sich

$$S_e = (k-1) - N_e$$

S_e^2 ist somit definiert als

$$\begin{aligned} S_e^2 &= ((k-1) - N_e)((k-1) - N_e) \\ &= (k-1)^2 - (k-1)N_e - N_e(k-1) + N_e^2 \\ &= (k-1)^2 - 2(k-1)N_e + N_e^2 \end{aligned}$$

Die Summe über alle Spieler lässt sich daher schreiben als

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^k S_e^2 &= \sum_{e=1}^k (k-1)^2 - 2(k-1) \sum_{e=1}^k N_e + \sum_{e=1}^k N_e^2 \\ &= k(k-1)^2 - 2(k-1) \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{e=1}^k N_e^2 \\ &= k(k^2 - 2k + 1) - ((k-1)(k^2 - k)) + \sum_{e=1}^k N_e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^3 - 2k^2 + k - k^3 + k^2 + k^2 - k + \sum_{e=1}^k N_e^2 \\
&= \sum_{e=1}^k N_e^2
\end{aligned}$$

q.e.d.

3.) Sei $A(n)$ die Aussage: $n^2 < 2^n$

(i) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \implies A(n+1)$?

Behauptung:

$A(n) \implies A(n+1)$ gilt für alle $n \geq 2 \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$$\begin{array}{llll}
A(1) & : & 1^2 < 2^1 & 1 < 2 \quad \checkmark \\
A(2) & : & 2^2 < 2^2 & 4 < 4 \quad - \\
A(3) & : & 3^2 < 2^3 & 9 < 8 \quad - \\
A(4) & : & 4^2 < 2^4 & 16 < 16 \quad - \\
A(5) & : & 5^2 < 2^5 & 25 < 32 \quad \checkmark \\
A(6) & : & 6^2 < 2^6 & 36 < 64 \quad \checkmark
\end{array}$$

also

n	$A(n)$	$A(n+1)$	$A(n) \implies A(n+1)$
1	wahr	falsch	falsch
2	falsch	falsch	wahr
3	falsch	falsch	wahr
4	falsch	wahr	wahr
5	wahr	wahr	wahr
> 5	wahr	wahr	wahr

Für alle $n \geq 5 \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ immer wahr. Beweis siehe (ii). Damit gilt das gesagte.

(ii) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ richtig?

Behauptung:

$$\forall (n \geq 5) \vee (n = 1) \in \mathbb{N} : n^2 < 2^n$$

Durchführung:

Induktionsanfang siehe (i)

Induktionsschluß $A(n) \implies A(n+1) \quad \forall n \geq 5 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &< 2^{n+1} \\ (n+1) \cdot (n+1) &< 2^{n+1} \\ n^2 + 2n + 1 &< 2 \cdot 2^n \\ n^2 + (2n+1) &< 2^n + (2^n) \end{aligned}$$

Aus dem Induktionsanfang folgt, daß $n^2 < 2^n \quad \forall n \geq 3 \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen bleibt, daß $2n+1 \leq 2^n$, damit die Gesamtsumme kleiner ist als $2^{(n+1)}$

Induktionsanfang Sei $A'(n)$ die Aussage $2n+1 \leq 2^n$.

$$\begin{aligned} A'(1) &: 2 \cdot 1 + 1 \leq 2^1 & 3 \leq 2 & - \\ A'(2) &: 2 \cdot 2 + 1 \leq 2^2 & 5 \leq 4 & - \\ A'(3) &: 2 \cdot 3 + 1 \leq 2^3 & 7 \leq 8 & \checkmark \\ A'(4) &: 2 \cdot 4 + 1 \leq 2^4 & 9 \leq 16 & \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsschluß $A'(n) \implies A'(n+1) \quad \forall n \geq 3 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2(n+1) + 1 &\leq 2^{n+1} \\ 2n + 2 + 1 &\leq 2 \cdot 2^n \\ 2n + 1 + (2) &\leq 2^n + (2^n) \end{aligned}$$

Aus dem Induktionsanfang folgt, daß $2n+1 \leq 2^n$.

Außerdem gilt $2 < 2^n$ für alle $n \geq 2 \in \mathbb{N}$.

Damit gilt $2n+1 \leq 2^n$ für alle $n \geq 3 \in \mathbb{N}$.

Damit gilt $n^2 + (2n+1) < 2^n + (2^n)$ für alle $n \geq 4 \in \mathbb{N}$.

Damit gilt $n^2 < 2^n$ für alle $n \geq 5 \in \mathbb{N}$ und laut Induktionsanfang auch für $n = 1$.

q.e.d.

4.) Man beweise: $(1+x) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, (x \neq 1)$

Behauptung: Der Author des Übungszettels hat ein $\wedge$ in seinem T_EX-Code vergessen, da

a.)

$$\prod_{i=0}^n (1+x^{2^i}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, (x \neq 1)$$

$$\dots = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \dots$$

nicht lösbar ist, wohl aber

b.)

$$\prod_{i=0}^n (1+x^{2^i}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, (x \neq 1)$$

$$\dots = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \dots$$

Beweis:

a.) **Behauptung**

$$\prod_{i=0}^n (1+x^{2^i}) \neq \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, (x \neq 1)$$

Zum Beispiel $x := 2, n = 2$

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^2 (1+2^{2^i}) &= (1+2) \cdot (1+2^2) \cdot (1+2^4) = \\ 3 \cdot 5 \cdot 17 &= 255 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1-2^{2 \cdot 2+1}}{1-2} &= \frac{1-2^5}{1-2} = \\ &= \frac{-31}{-1} = 31 \end{aligned}$$

$$255 \neq 31$$

Damit gilt das gesagte.

b.)

$$\prod_{i=0}^n (1 + x^{2^i}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}, (x \neq 1)$$

$$\text{Induktionsanfang } A(0) = \prod_{i=0}^0 (1 + x^{2^i}) = \frac{1 - x^{2^{0+1}}}{1 - x}$$

$$\begin{aligned} (1 + x^{2^0}) &= \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \\ (1 + x^1) &= \frac{1 - x^{2^{0+1}}}{1 - x} \\ 1 + x &= \frac{1 - x^2}{1 - x} \\ 1 + x &= \frac{(1 - x) \cdot (1 + x)}{1 - x} \\ 1 + x &= 1 + x \end{aligned}$$

$$\text{Induktionsschluß } A(n) \implies A(n+1) \quad \forall n \geq 0 \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n+1} (1 - x^{2^i}) &= \frac{1 - x^{2^{(n+1)+1}}}{1 - x} \\ (1 + x^{2^{n+1}}) \cdot \prod_{i=0}^n (1 - x^{2^i}) &= \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1 - x} \end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} (1 + x^{2^{n+1}}) \cdot \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} &= \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1 - x} \\ \frac{(1 + x^{2^{n+1}}) \cdot (1 - x^{2^{n+1}})}{1 - x} &= \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1 - x} \\ 1 - (x^{2^{n+1}})^2 &= 1 - x^{2^{n+2}} \\ 1 - (x^{2^{n+1}} \cdot x^{2^{n+1}}) &= 1 - x^{2^{n+2}} \\ 1 - x^{2^{n+1}+2^{n+1}} &= 1 - x^{2^{n+2}} \\ 1 - x^{2^{n+2}} &= 1 - x^{2^{n+2}} \end{aligned}$$

q.e.d.