

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 10

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

**1.) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$.
Man zeige: Es gibt $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$**

Der Fixpunktsatz besagt, daß jede stetige Funktion in einem Intervall $[a, b]$ mit einem $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$ (oder umgekehrt) mindestens eine Nullstelle besitzt.

Gegeben sei also eine Funktion

$$g(x) := f(x) - x, \quad x \in [a, b]$$

Diese ist ebenfalls stetig in $[a, b]$. Existiert eine Nullstelle $g(x_0) = 0$, so gilt an dieser Stelle wegen

$$g(x_0) = f(x_0) - x_0 \Rightarrow 0 = f(x_0) - x_0$$

das gesuchte $f(x_0) = x_0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \in [a, b]$. Also gilt

$$f(a) - a \geq 0$$

Damit hat man wieder zwei Fälle:

- In dem Fall, daß $g(a) = 0$ gilt, ist das gesuchte $x_0 := a$.
- In dem Fall, daß $g(a) > 0$ gilt, ergibt sich wegen $f(b) \leq b$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Dann muß man wieder unterscheiden:

1. $g(b) = 0$: Damit ist das gesuchte $x_0 := b$.
2. $g(b) < 0$: Damit existiert aufgrund der Stetigkeit der Funktion und des Zwischenwertsatzes eine Nullstelle in dem Intervall $[a, b]$. An dieser Stelle ist $g(x_0) = 0$

Also existiert in dem Intervall $[a, b]$ mindestens ein Punkt x_0 , an dem $f(x_0) = x_0$ gilt.

Damit wäre auch der Fixpunktsatz bewiesen ;-)

2.) Sei $I = [0, 1]$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in I \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{für } x \in I \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Man zeige f ist nur an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ stetig, nimmt jedoch jeden Wert zwischen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ an.

a.)

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass ist eine Funktion stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $\varepsilon, \delta > 0$. An der Stelle $x_0 := \frac{1}{2}$

gilt nun $f(x_0) = \frac{1}{2}$, da $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ gilt.

Für ε ergeben sich vier Fälle:

1. $x \in \mathbb{Q} \cap I$ Damit ist $f(x) = x$, und für ε gilt:

$$\varepsilon < \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

2. $x \in \mathbb{Q} \setminus I$ Damit ist $f(x) = 1 - x$, und für ε gilt:

$$\varepsilon < \left| (1 - x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - x \right|$$

Wegen $\left| \frac{1}{2} - x \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right|$ besitzen beide Fälle das gleiche ε .

Für δ muß

$$\delta > \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

gelten.

Also kann für $\delta := \varepsilon$ angenommen werden. Damit existiert ein δ . Damit ist die Funktion nach Bolzano-Weierstrass stetig.

Behauptung: Die Funktion $f(x)$ ist nur an der Stelle $\frac{1}{2}$ stetig.

Beweis (durch Widerspruch): Angenommen, es gibt ein $y \neq \frac{1}{2}$, an dem die Funktion stetig ist.

Für $x_0 := y \neq \frac{1}{2}$ gilt einer der beiden Fälle

1. $x \in \mathbb{Q} \cap I, y \in \mathbb{Q} \cap I$ Damit ist $f(y) = y$, und für ε gilt:

$$\varepsilon < |x - y|$$

2. $x \in \mathbb{Q} \setminus I, y \in \mathbb{Q} \cap I$ Damit ist $f(y) = 1 - y$, und für ε gilt:

$$\varepsilon < |(1 - x) - y| = |1 - (x + y)|$$

3. $x \in \mathbb{Q} \cap I, y \in \mathbb{Q} \setminus I$ Damit ist $f(y) = y$, und für ε gilt:

$$\varepsilon < |x - (1 - y)| = |(x + y) - 1| = |1 - (x + y)|$$

4. $x \in \mathbb{Q} \setminus I, y \in \mathbb{Q} \setminus I$ Damit ist $f(y) = 1 - y$, und für ε gilt:

$$\varepsilon < |(1 - x) - (1 - y)| = |x - y| = |y - x|$$

Versucht man für alle Fälle ein gleiches ε zu finden

$$|x - y| = |1 - (x + y)|$$

so erhält man vier Fälle:

1. $x > y, 1 > (x + y)$:

$$\begin{aligned} x - y = 1 - (x + y) &\Leftrightarrow x - y = 1 - x - y \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. $x > y, 1 < (x + y)$:

$$\begin{aligned} x - y = (x + y) - 1 &\Leftrightarrow x - y = x + y - 1 \\ &\Leftrightarrow -2y = -1 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. $x < y, 1 > (x + y)$:

$$\begin{aligned} y - x = 1 - (x + y) &\Leftrightarrow y - x = 1 - x - y \\ &\Leftrightarrow 2y = 1 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. $x < y, 1 < (x + y)$:

$$\begin{aligned} y - x = (x + y) - 1 &\Leftrightarrow y - x = x + y - 1 \\ &\Leftrightarrow -2x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

In allen vier Fällen ergibt sich, daß entweder $x = \frac{1}{2}$ oder $y = \frac{1}{2}$ gelten muß, damit das ε eindeutig bestimmt ist. 

Damit kann an der Stelle $y \neq \frac{1}{2}$ das ε nicht eindeutig bestimmt werden, somit kann auch kein δ gefunden werden, also ist die Funktion dort nicht stetig.

q.e.d.

b.)

Behauptung Für jede Zahl $y \in [0, 1]$ existiert ein $f(x) = y$.

Beweis Es existieren insgesamt zwei Fälle:

- 1. Fall, $y \in I \cap \mathbb{Q}$** In diesem Fall ist $f(y) = y$. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{Q}$ und $1 \in \mathbb{Q}$, daher existieren $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
- 2. Fall, $y \in I \setminus \mathbb{Q}$** In diesem Fall existiert ein $f(y) = 1 - y$ mit $f(y) \in [0, 1]$.
Da

$$1 - y = -(y - 1) = -(y + (-1))$$

gilt, muß aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathbb{Q}$ bezüglich der Addition $1 - y$ ebenfalls ausserhalb von $\mathbb{Q}$ liegen.

Deshalb gilt, daß

$$f(1 - y) = 1 - (1 - y) = 1 - 1 + y = y$$

ist, somit bildet die Funktion also auch auf y ab.

q.e.d.

3.) Man bestimme alle stetigen Funktionen f und g , die folgenden Funktionalgleichungen genügen.

i.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Dies sind alle Polynome ersten Grades in der Form

$$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$$

da für diese aufgrund der Distributivität in $\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x + y) &= a(x + y) = ax + ay \\ f(x) + f(y) &= ax + ay \end{aligned}$$

und somit

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ii.) $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(xy) = g(x) + g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

Dies sind alle Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \ln x$$

da für diese

$$\begin{aligned} f(xy) &= \ln x \cdot y = \ln x + \ln y \\ f(x) + f(y) &= \ln x + \ln y \end{aligned}$$

gilt.

4.) Der radioaktive Zerfall einer Substanz werde beschrieben durch $y = y_0 e^{-kt}$. Dabei mißt t die Zeit, y_0 ist die Menge der Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$, $y = y(t)$ die Menge der Substanz zum Zeitpunkt $t > 0$, k eine positive Konstante. Man zeige, daß die Halbwertszeit τ , in der eine Substanz y auf die Hälfte $y/2$ abnimmt, unabhängig von y ist.

Mit $y(t) := y_0/2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt} &\Leftrightarrow \frac{y_0}{2y_0} = e^{-kt} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt} \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = -kt \\ &\Leftrightarrow -\frac{\ln \frac{1}{2}}{k} = t \end{aligned}$$

Da $\ln \frac{1}{2} \approx -0,69 \dots$ ist, existiert ein Zeitpunkt, an dem die Menge der Substanz auf die Hälfte zerfallen ist.

Für jeden beliebigen Zeitpunkt t gilt ausserdem für $y(t+x) = y(t)/2$

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{2} = y(t) e^{-k(t+x)} &\Leftrightarrow \frac{y(t)}{2y(t)} = e^{-k(t+x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-k(t+x)} \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = -k(t+x) \\ &\Leftrightarrow -\frac{\ln \frac{1}{2}}{k} = t+x \end{aligned}$$

Da $\ln \frac{1}{2} \approx -0,69 \dots$ ist, existiert ein Zeitpunkt, an dem die Menge der Substanz auf die Hälfte zerfallen ist.

Somit ist die Halbwertszeit unabhängig von y .