

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 5

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Man zeige

i) $\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. Per Definition heißt eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ ein Supremum der Menge $M \subset \mathbb{R}$, falls s die kleinste obere Schranke für M ist. Mit anderen Worten:

- a.) s ist eine obere Schranke für M , und
- b.) jede Zahl $s' < s$ ist keine obere Schranke von M .

Zu zeigen: $\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$

Beweis: Angenommen die Menge A sei wie folgt definiert:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 2\}$$

Dann wissen wir, daß $1 \in A$ ist, somit ist A nicht leer. Zudem ist $a \leq 2, \forall a \in A$.

Wenn $x > 2$ gilt, dann gilt auch $x^2 > 2^2 = 4 > 2$, also ist $x \notin A$. Deshalb ist A nicht leer und hat eine obere Schranke.

Damit existiert ein $\sup A := \alpha$.

Insgesamt ergeben sich nun zwei Fälle:

1. Wenn $\alpha^2 < 2$, dann gibt es $\alpha + \varepsilon \in A$ für $\varepsilon > 0$.

Liegt ε zwischen 0 und 1, dann ergibt sich die Ungleichung.

$$|\alpha + \varepsilon|^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon = \alpha^2 + (2\alpha + 1)\varepsilon.$$

Aufgelöst nach ε somit

$$\alpha^2 + (2\alpha + 1)\varepsilon < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon < \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}$$

Deshalb kann man für ε annehmen, daß

$$0 < \varepsilon < \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1} = \min \left\{ 1, \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1} \right\}$$

Damit ergibt sich dann aber $(\alpha + \varepsilon) < 2$



2. Wenn $\alpha^2 > 2$ gilt, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $x > \alpha - \varepsilon$ gilt. Angenommen $\varepsilon < \alpha$ und $x > \alpha - \varepsilon$. Deshalb ist

$$x^2 > (\alpha - \varepsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon.$$

Aber

$$\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$$

Damit läßt sich ein $\varepsilon < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$ finden, so daß $x > \alpha - \varepsilon$ gilt, also auch $x^2 > 2$. Dieses x liegt dann aber nicht mehr in A .



Also ist $\sqrt{2}$ das Supremum der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$.

ii) Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung um x . Dann gilt:

$$x = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Angenommen $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es ein $a_n \in A$, so daß A nicht leer ist. $a_n \leq b_n$ so daß b_n eine obere Schranke für A ist. Deshalb existiert ein $\alpha = \sup A$.

Behauptung: $\alpha = x$.

Beweis: Durch Widerspruch.

Angenommen $\alpha < x$, $x \in A$, $\alpha \in A$. Dann gibt es ein Intervall $[a_n, \alpha]$ mit $\alpha - a_n < x - \alpha$. Wegen $a \in [a_n, \alpha]$ folgt daraus $\alpha - a < x - a$, also existiert ein ε , so daß $\alpha + \varepsilon \in A$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da α die obere Schranke von A ist.



Angenommen $\alpha > x$. Wenn es eine obere Schranke $x > \alpha$ gibt, so gäbe es ein Intervall $[a_n, \alpha]$ mit einer Länge $< \alpha - x$. Wegen $\alpha \in [a_n, \alpha]$ folgt daraus $\alpha - a_n < \alpha - x \implies a_n > x$.



Die Menge der oberen Grenze sei definiert als

$$B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Weil $b_n \in B$ liegt, ist B nicht leer. Weil $a_n < b_n$, so daß a_n die untere Schranke für B ist. Deshalb existiert ein $\beta = \inf B$.

2.) Man entwickle $x = \frac{1}{7}$ in einem g -adischen Bruch für $g = 2, 7, 10, 12$ (Im 12-adischen System verwende man als Ziffern $\eta = 10, \mu = 12$)

$g = 2$ Umgewandelt in das 2-adische System ist $7_{10} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111_2$.

Der Bruch lässt sich anschließend über schriftliche Division bestimmen.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad : \quad 111 = 0,001001\dots \\
 10 \\
 100 \\
 1000 \\
 - \quad \underline{111} \\
 10 \\
 100 \\
 1000 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Im 2-adischen System schreibt man den Bruch $\frac{1}{7}$ daher als $0, \overline{001}_2$.

$g = 7$ Umgewandelt in das 7-adische System ist $7_{10} = 1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 = 10_7$.

Der Bruch lässt sich anschließend über schriftliche Division bestimmen.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad : \quad 10 = 0,1 \\
 10 \\
 - \quad \underline{10} \\
 0
 \end{array}$$

Im 7-adischen System ist die Darstellung des Bruches $\frac{1}{7}$ abbrechend und wird als $0,1_7$ geschrieben.

$g = 10$ Im 10-adischen System ist $7_{10} = 7_{10}$.

Die Darstellung des Bruches lässt sich über schriftliche Division bestimmen.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad : \quad 7 = 0,1428571\dots \\
 10 \\
 - \quad \underline{7} \\
 30 \\
 - \quad \underline{28} \\
 20 \\
 - \quad \underline{14} \\
 60 \\
 - \quad \underline{56} \\
 40 \\
 - \quad \underline{35} \\
 50 \\
 - \quad \underline{49} \\
 10 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Im 10-adischen System wird der Bruch $\frac{1}{7}$ als $0, \overline{142857}_{10}$ geschrieben.

$g = 12$ In (diesem) 12-adischen System ist $7_{10} = 7_{12}$, $10_{10} = \eta_{12}$, $11_{10} = \mu_{12}$.

Die Darstellung des Bruches lässt sich über schriftliche Division bestimmen.

$$\begin{array}{rcl}
 1 & : & 7 = 0,186\eta351\dots \\
 10 & & \\
 - \underline{7} & & \\
 50 & & \\
 - \underline{48} & & \\
 40 & & \\
 - \underline{36} & & \\
 60 & & \\
 - \underline{5\eta} & & \\
 20 & & \\
 - \underline{19} & & \\
 30 & & \\
 - \underline{2\mu} & & \\
 10 & & \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

Somit wird in (diesem) 12-adischen System der Bruch $\frac{1}{7}$ periodisch und als $0,186\eta35_{12}$ geschrieben.

Zusatz:

Allgemein kann man die Ziffern eines g -adischen Bruches $\frac{Zaehler}{Nenner}$ mit folgendem C-Programm berechnen:

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define STELLENZAHL 24
int main(void)
{
    int g=12;
    int zaehler=1;
    int nenner=7;

    int rest[STELLENZAHL];
    int i,j=0;

    for (i=0;i<24;i++)
    {
        rest[i]=zaehler;
        for (j=0;j<i;j++)

```

```

{
    if (rest[j]==rest[i])
    {
        printf("Periode ab der %iten Nachkommastelle\n",j);
        exit(0);
    }
}
printf("%i\n",zaehler/nenner);
if (zaehler>nenner) zaehler=zaehler%nenner;
zaehler=zaehler*g;
}
}

```

3.) Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist genau dann rational, wenn ihr g -adischer Bruch schließlich periodisch wird.

„ $\Leftarrow$ “ Die g -adische Darstellung des Bruches

$$p(n) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} (g-1) \cdot g^j}$$

liegt für endliche $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$, (da $1 \in \mathbb{Z}$ liegt und die Summe eine natürliche Zahl ist), und ist periodisch und hat die Form $0,00 \dots 100 \dots 1 \dots$, oder $0, \underbrace{00 \dots}_{(n-1)-mal} 1$, da bei einer schriftlichen Division

nach n Schritten der Fall

$$\frac{g^n}{\sum_{j=0}^{n-1} (g-1) \cdot g^j} = 1 \quad (*)$$

auftaucht. Der Rest dieser Division ist ebenfalls wieder 1, deswegen ergeben sich für alle anderen Nachkommastellen dieselben n Werte wie zu Beginn.

Damit ergeben sich zwei Fälle:

1. Jede g -adische Darstellung eines Bruches, $x := y, \overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, $a_i \in \{0, \dots, g-1\}$, $y \in \mathbb{Z}$, der ab der ersten Nachkommastelle periodisch über n Stellen wird, läßt sich nun als

$$p'(n) := y + \left(\sum_{i=0}^n a_i g^i \right) \cdot p(n)$$

schreiben. Das Ergebnis der Summe in den Klammern ist ein Element der ganzen Zahlen, $p(n)$ ist ein Element aus $\mathbb{Q}$, addiert wird

zudem noch mit einer ganzen Zahl y , somit ist das gesamte Produkt Element aus $\mathbb{Q}$, somit liegt also auch $p'(n)$ in $\mathbb{Q}$, aufgrund der Abgeschlossenheit von $(\mathbb{Q}, +)$.

2. Ein Bruch, welcher erst ab der m -ten Nachkommastelle periodisch über n Stellen wird, läßt sich schreiben als

$$p''(m, n) = y + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i g_i}{g^m} + \left[\left(\sum_{i=0}^n a_{m+i} g_i \right) \cdot p(n) \right] \cdot g^{-m}$$

wenn m, n endlich sind und Elemente von $\mathbb{N}$ sind. Da y wieder eine ganze Zahl ist, und der Bruch in $\mathbb{Q}$ liegt, und das Produkt ebenfalls, liegt auch $p''(m, n)$ in $\mathbb{Q}$, aufgrund der Abgeschlossenheit von $(\mathbb{Q}, +)$.

„ $\Rightarrow$ “ Ein rationaler Bruch $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ läßt sich mit einem genügend großen $n \in \mathbb{N}_0$ erweitern zu einem Bruch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{y} = \frac{ay}{\sum_{i=0}^n (g-1)g^i}$$

(mit $y = \left(\sum_{i=0}^n (g-1)g^i \right) / b \in \mathbb{N}$) welcher aufgrund der bei (*) erwähnten Eigenschaften periodisch wird.

Ist die Darstellung abbrechend, so läuft ihre Periode über 0.

Damit ist eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ genau dann rational, wenn ihr g -adischer Bruch schließlich periodisch wird.

4.) Folgende komplexe Zahlen stelle man in der Form $a + ib$

dar: $\frac{2+i}{2-i}$, $(1+i)^n + (1-i)^n$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$, $\sqrt{i}$

$$\frac{2+i}{2-i}$$

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{2+i}{2+i} \cdot \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{2^2 - i^2} = \frac{4 + 4i + i^2}{4 + 1} = \frac{4 + 4i - 1}{5} = \frac{3 + 4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$(1+i)^n + (1-i)^n$ Da $i^n = i^{4+n}$ und $(-i)^n = (-i)^{4+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, genügt es sich zunächst einmal die ersten fünf Fälle zu betrachten, um zu erkennen, daß das Ergebnis keinen imaginären Anteil enthält:

$$\begin{aligned} (1+i)^0 + (1-i)^0 &= 1 + 1 = 2 \\ (1+i)^1 + (1-i)^1 &= 1 + i + 1 - i = 2 \\ (1+i)^2 + (1-i)^2 &= 1 + 2i + i^2 + 1 - 2i + i^2 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ (1+i)^3 + (1-i)^3 &= 1 + 3i + 3i^2 + i^3 + 1 - 3i + 3i^2 - i^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 3 + 1 - 3 = -4 \\
(1+i)^4 + (1-i)^4 &= 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 + 1 - 4i + 6i^2 - 4i^3 + i^4 \\
&= 1 - 6 + 1 + 1 - 6 + 1 = -8
\end{aligned}$$

Für die Werte von n zwischen 0 und 29 ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

2	2	0	-4	-8	-8	0	16	32	32
0	-64	-128	-128	0	256	512	512	0	-1024
-2048	-2048	0	4096	8192	8192	0	-16384	-32768	-32768

Eine andere Möglichkeit wäre die Formel von Moivre anzuwenden:

$$z^n = [|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Für $z_1^n + z_2^n$ somit:

$$z_1^n + z_2^n = |z_1|^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1) + |z_2|^n (\cos n\varphi_2 + i \sin n\varphi_2)$$

Mit $z_1 := 1+i$ und $z_2 := 1-i$ ergeben sich für $|z_1|$ und $|z_2|$ somit nach dem Satz des Pythagoras $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
 $\varphi_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \arctan \frac{1}{-1} = \frac{7\pi}{4}$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2}^n \left(\cos n\frac{7\pi}{4} + i \sin n\frac{7\pi}{4} \right)$$

Wegen $\sin n\frac{\pi}{4} = -\sin n\frac{7\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ somit:

$$= \sqrt{2}^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + \cos n\frac{7\pi}{4} \right)$$

Insgesamt ergeben sich damit nun acht Fälle: Für den Cosinus eines Winkels des vielfachen von $\frac{\pi}{4}$ ergeben sich die Werte $1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
n := 8m + 0 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n (1+1) \\
&= \sqrt{2}^n \cdot 2 = 2^{n/2+1} \\
n := 8m + 1 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \\
&= \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^{8m+1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^{8m} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}^{4m} \cdot 2 = 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n := 8m + 2 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n (0+0) = 0 \\
n := 8m + 3 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \\
&= \sqrt{2}^n \cdot (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}^{8m+3} \cdot \sqrt{2} \\
&= -\sqrt{2}^{8m+3+1} = -2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \\
n := 8m + 4 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n (-1-1) = \sqrt{2}^n \cdot (-2) \\
&= -2 \cdot \sqrt{2}^{8m+4} = -2 \cdot 2^{n/2} = -2^{n/2+1} \\
n := 8m + 5 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = \sqrt{2}^n (-\sqrt{2}) \\
&= -\sqrt{2}^n \sqrt{2} = -\sqrt{2}^{8m+5} \sqrt{2} = -\sqrt{2}^{8m+5+1} \\
&= -2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \\
n := 8m + 6 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n (0+0) = 0 \\
n := 8m + 7 \quad (1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt{2}^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}^{8m+7} \sqrt{2} = \sqrt{2}^{8m+7+1} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend also

$$(1+i)^n + (1-i)^n = \underline{\underline{v(n) \cdot 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}}}$$

Mit

$$v(n) = \begin{cases} -1 & \text{falls } n = 8m + 3 \text{ oder } n = 8m + 4 \text{ oder } 8m + 5 \\ 1 & \text{falls } n = 8m + 0 \text{ oder } n = 8m + 1 \text{ oder } n = 8m + 6 \\ 0 & \text{falls } n = 8m + 2 \text{ oder } n = 8m + 6 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^4$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^4 &= \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right)^4 = \left(\frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} \right)^4 = \left(\frac{(1+i)^2}{1+1} \right)^4 = \left(\frac{1^2+2i+i^2}{2} \right)^4 \\
&= \left(\frac{1+2i-1}{2} \right)^4 = \left(\frac{2i}{2} \right)^4 = (i)^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 = 1 + 0 = \underline{\underline{1+0i}}
\end{aligned}$$

$\sqrt{i} \cdot |i| = 1$, daher lässt sich der Satz von Moivre anwenden:

$$z^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)$$

Mit $z := i$, $n := \frac{1}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ somit:

$$i^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\
&= \underline{\underline{\pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Da Wurzeln sowohl positive als auch negative Ergebnisse haben, muß man nun noch herausfinden, welche Kombination ihrer Vorzeichen im Quadrat i ergeben:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}2 + 2 \cdot i\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}2 \cdot i^2 = 0 + 1i \quad \checkmark \\
\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}2 - 2 \cdot i\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}2 \cdot i^2 = 0 - 1i \quad \nless \\
\left(+\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}2 - 2 \cdot i\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}2 \cdot i^2 = 0 - 1i \quad \nless \\
\left(+\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}2 + 2 \cdot i\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}2 \cdot i^2 = 0 + 1i \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$\frac{2+i}{2-i}$ läßt sich daher schreiben als $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ als $1 + 0i$, $(1+i)^n + (1-i)^n$ als $v(n) \cdot 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$, und $\sqrt{i}$ als $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}$ bzw. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$.