

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 6

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Man bestimme alle Wurzeln in $\mathbb{C}$ der quadratischen Gleichung $z^2 + az + b = 0$; $a, b \in \mathbb{C}$. Was sind die Quadratwurzeln von i und $3 - 4i$?

Behauptung: Die n -ten Wurzeln des Polynomes $(*) z^2 + az + b = 0$ sind immer gleich 0, da dann $\sqrt[n]{z^2 + az + b} = \sqrt[n]{0}$ gilt, und $\sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: Per Induktion über n .

Induktionsanfang $A(2)$

$$n := 2$$

Angenommen es gibt eine Zahl $y \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$, welche die Quadratwurzel von 0 darstellt. Da jede Multiplikation mit 0 als Ergebnis wieder 0 ergibt, läßt sich y folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{0} &= y \\ 0 &= y^2 \\ \frac{0}{y} &= y \\ 0 \cdot \frac{1}{y} &= y \\ 0 &= y \\ &\swarrow \end{aligned}$$

Somit muß die Quadratwurzel aus 0 auch wieder 0 sein.

Induktionsschritt $A(n) \implies A(n+1)$

Angenommen es gibt eine Zahl $y \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$, welche die $n+1$ -te Wurzel von 0 darstellt.

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{0} &= y \\ 0 &= y^{n+1} \\ \frac{0}{y^n} &= y \\ 0 \cdot \frac{1}{y^n} &= y \\ 0 &= y \\ &\swarrow \end{aligned}$$

Somit muß die $n+1$ -te Wurzel aus 0 auch wieder 0 sein.

q.e.d.

Das Polynom $z^2 + az + b = 0$ lässt sich in sogenannter Scheitelpunktform schreiben:

$$(z + c)^2 + d = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2cz + c^2 + d = 0, \quad c, d \in \mathbb{C}$$

was von Vorteil ist, da es hiermit leichter ist, die Nullstellen des Polynomes zu bestimmen:

$$\begin{aligned} (z + c)^2 + d = 0 &\Leftrightarrow (z + c)^2 = -d \\ &\Leftrightarrow z + c = \pm \sqrt{-d} \\ &\Leftrightarrow z = -c \pm \sqrt{-d} \quad (**) \end{aligned}$$

Um herauszufinden, welche Werte für c und d einzusetzen sind, wenn a und b bekannt sind, reicht es aus, folgende zwei Gleichungssysteme mit den Unbekannten c und d zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} I & & 2c = a \\ II & c^2 + & d = b \\ \hline I' & & c = \frac{a}{2} \\ II' & \left(\frac{a}{2}\right)^2 + & d = b \\ II'' & & d = b - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{array}$$

Diese Werte kann man nun wieder in die Formel (**) einsetzen:

$$\begin{aligned} z_{1,2} = -\left(\frac{a}{2}\right) \pm \sqrt{-\left(b - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} &\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \\ &\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \\ &\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b}{4}} \\ &\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}} \\ &\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad (***) \end{aligned}$$

Diese Formel hilft, um die Quadratwurzeln aus i und $3 - 4i$ zu berechnen:

Quadratwurzel aus i

Setzt man für ein beliebiges $a \in \mathbb{C}$ in (*) für $b := 0$ ein, so finden sich die Nullstellen bei

$$z^2 + az = 0 \Leftrightarrow z^2 = -az \Leftrightarrow z = -a$$

Außerdem kann man ein $a^2 = i$ finden, da $a := \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta i + i^2\beta^2 \\ &= \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i\end{aligned}$$

Nun müssen noch $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bestimmt werden, so daß $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ und $2\alpha\beta = 1$ ergibt.

$$\begin{array}{rcll} I & \alpha^2 & - & \beta^2 = 0 \\ II & 2\alpha & \cdot & \beta = 1 \\ \hline I' & & & \alpha^2 = \beta^2 \\ II' & 4\alpha^2 & \cdot & \alpha^2 = 1 \\ II'' & & & \alpha^4 = \frac{1}{4} \\ II''' & & & \alpha = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}$$

Somit läßt sich für $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, für $b = 0$ und $z = -a$ in (***) einsetzen:

$$\begin{aligned}-a &= -\frac{1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot 0} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + i^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{2\sqrt{2}} - i\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1-2}{2\sqrt{2}} + i\frac{1-2}{2\sqrt{2}} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{2i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{2i\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \pm \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{i} \\ \Leftrightarrow \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{i}\end{aligned}$$

Natürlich hätte man das auch einfacher herausfinden können, aber wir wollten mal Tobi ärgern ;-)

Quadratwurzel aus $3 - 4i$

Allgemein läßt sich der Ausdruck $(i + a)^2$, $a \in \mathbb{R}$ schreiben als

$$(i + a)^2 = i^2 + 2ai + a^2 = 2ai + a^2 - 1$$

Durch Koeffizientenvergleich erkennt man sofort, daß $2a = 4$ und $a^2 - 1 = 3$ gelten muß, damit die Quadratwurzel aus $3 - 4i$ gleich $\pm(i + a)$ ergibt. Für a ergibt sich $2a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{2} \Leftrightarrow a = 2$, was auch für $2^2 - 1 = 3$ ein wahres Ergebnis liefert.

Damit ist das Ergebnis $\pm(2 + i)$.

Die Quadratwurzel aus i ist somit $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, die aus $3 - 4i$ ist $\pm(2 + i)$.

2.) Man berechne alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung $z^6 = 1$ und zeige, daß sie die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks bilden.

Da $|1| = 1$ gilt, läßt sich zur Berechnung von $\sqrt[n]{1}$ die Formel von Moivre anwenden:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cos\left(\frac{k}{n} \cdot \varphi\right) + i \sin\left(\frac{k}{n} \cdot \varphi\right), \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k < n$$

damit sieht man sofort, daß die Winkel immer 60° betragen und den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, weswegen auch die Seiten des Sechsecks immer gleich lang sind.

Das ist aber langweilig, wir wollen was schwereres:

Der Ausdruck $z^6 = 1$ läßt sich umwandeln zu $(z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0$:

$$\begin{aligned} z^6 = 1 &\Leftrightarrow z^6 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^{3 \cdot 2} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z^3)^2 - 1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$z^3 - 1 = 0$$

Für das Polynom $z^3 - 1 = 0$ ergibt sich mit $z := 1$ eine Nullstelle: $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Durch Polynomdivision läßt sich ein Polynom zweiten Grades finden, mit dem sich die restlichen beiden Nullstellen bestimmen lassen:

$$\begin{array}{r} (z^3 - 1) : (z - 1) = z^2 + z + 1 \\ \underline{-(z^3 - z^2)} \\ z^2 - 1 \\ \underline{-(z^2 - 1)} \\ 0 \end{array}$$

In die bekannte Formel für die quadratische Ergänzung

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

setzt man $p := 1$, $q := 1$ ein, und erhält somit zwei weitere Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1^2}{4} - 1} &\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ &\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} \\ &\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1^2}{4} - 1} &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} \\ &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Das Polynom $z^3 - 1$ hat somit die drei Nullstellen $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

$$z^3 + 1 = 0$$

Für das Polynom $z^3 + 1 = 0$ ergibt sich mit $z := -1$ eine Nullstelle:
 $(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Durch Polynomdivision läßt sich ein Polynom zweiten Grades finden, mit dem sich die restlichen beiden Nullstellen bestimmen lassen:

$$\begin{array}{rcl} (z^3 & + & 1) : (z + 1) = z^2 - z + 1 \\ \underline{-(z^3 + z^2)} & & \\ -z^2 & + & 1 \\ \underline{-(-z^2 + 1)} & & \\ 0 & & \end{array}$$

In die bekannte Formel für die quadratische Ergänzung

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

setzt man $p := -1$, $q := 1$ ein, und erhält somit zwei weitere Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 = -\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - 1} &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

und

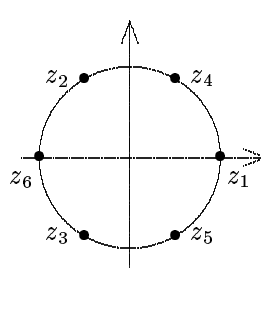
$$\begin{aligned} x_2 = -\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - 1} &\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} \\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Das Polynom $z^3 + 1$ hat somit die drei Nullstellen $z = -1$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

Zusammenfassend läßt sich $z^6 - 1$ also auch schreiben als

$$z^6 - 1 = (z - 1) \cdot (z + 1) \cdot \left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \cdot \left(z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)$$

Die sechs Lösungen für $z^6 = 1$ sind somit $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $z_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $z_6 = -1$. Diese Punkte kann man graphisch aufzeichnen, und erkennt, daß sie zueinander für eine Permutation die gleichen Abstände herauskommen, die man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen kann:



$$\begin{aligned}
|z_1 - z_4| &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\
|z_4 - z_2| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 0} = 1 \\
|z_2 - z_6| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\
|z_6 - z_3| &= \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\
|z_3 - z_5| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 0} = 1 \\
|z_5 - z_1| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1
\end{aligned}$$

Verbindet man daher die Punkte $z_1 = (1, 0)$, $z_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $z_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $z_6 = (-1, 0)$, $z_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $z_5 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und anschließend wieder z_1 miteinander, so ergibt sich ein gleichmäßiges Sechseck.

3.) Man berechne alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 1$. Man zeige, daß die Lösungen in Bezug auf die Multiplikation eine zyklische Gruppe bilden. Man gebe Erzeuger an. Für eine Lösung ζ zeige man: $|\zeta^2 - 1| : |\zeta - 1| = g$. Man deute dies Ergebnis am regelmäßigen Fünfeck.

Man berechne alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 1$.

Der Ausdruck $z^5 = 1$ läßt sich umwandeln in $z^5 - 1 = 0$. Eine Nullstelle dieses Polynoms liegt bei $z := 1$, da $1^5 - 1 = 1 - 1 = 0$ ergibt. Um die restlichen Nullstellen zu finden muß man nun die Polynomdivision anwenden:

$$\begin{array}{r}
(z^5 - 1) : (z - 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\
\underline{-(z^5 - z^4)} \\
z^4 - 1 \\
\underline{-(z^4 - z^3)} \\
z^3 - 1 \\
\underline{-(z^3 - z^2)} \\
z^2 - 1 \\
\underline{-(z^2 - z)} \\
z - 1 \\
\underline{-(z - 1)} \\
0
\end{array}$$

Das Polynom $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ läßt sich schreiben als Produkt zweier Polynome vom Grad 2:

$$(z^2 + az + 1)(z^2 + bz + 1) = z^4 + bz^3 + z^2 + az^3 + abz^2 + az + z^2 + bz + 1$$

$$= z^4 + (a+b)z^3 + (2+ab)z^2 + (a+b)z + 1$$

Um herauszufinden, welche Werte für a und b einzusetzen sind, reicht es aus, folgende zwei Gleichungssysteme mit den Unbekannten a und b zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} I & a+b & = 1 \\ II & 2+ab & = 1 \\ \hline I' & b & = 1-a \\ II' & ab & = -1 \\ II'' & a(1-a) & = -1 \\ II''' & a-a^2 & = -1 \\ II'''' & 0 & = a^2-a-1 \end{array}$$

Die Nullstellen des Polynomes $a^2 - a - 1$ lassen sich mit Hilfe der Formel für die quadratische Ergänzung finden

$$a_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

indem man für $p := -1$ und $q := -1$ einsetzt:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - (-1)} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \\ &\Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &\Leftrightarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a_2 &= -\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - (-1)} \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \\ &\Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &\Leftrightarrow a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Für b ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - a_1 \\ &= 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= 1 - a_2 \\
&= 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{2}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{2 - 1 + \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Das Polynom $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ lässt sich somit als Produkt der beiden Polynome zweiten Grades

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \left(z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1\right) \left(z^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1\right)$$

schreiben.

Ihre Nullstellen findet man wieder mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

$$z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1$$

Mit $p := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und $q := 1$ ergibt sich bei der quadratischen Ergänzung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{(1 + \sqrt{5})/2}{2} + \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5})^2/4}{4} - 1} \\
&= -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{1^2 + 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{16} - 1} \\
&= -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} - 1} \\
&= -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{6 - 16 + 2\sqrt{5}}{16}} \\
&= -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{-10 + 2\sqrt{5}}{16}} \\
&= -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i
\end{aligned}$$

$$x_2 = -\frac{(1 + \sqrt{5})/2}{2} - \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5})^2/4}{4} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{1^2 + 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{6 - 16 + 2\sqrt{5}}{16}} \\
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{-10 + 2\sqrt{5}}{16}} \\
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i
\end{aligned}$$

$$z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1$$

Mit $p := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $q := 1$ ergibt sich bei der quadratischen Ergänzung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{(1-\sqrt{5})/2}{2} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2/4}{4}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5} - 16}{16}} \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{-10 - 2\sqrt{5}}{16}} \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i
\end{aligned}$$

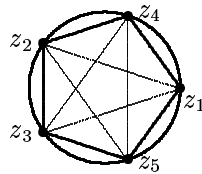
$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{(1-\sqrt{5})/2}{2} - \sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2/4}{4}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{16}} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{1-2\sqrt{5}+5}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} - 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}-16}{16}} \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{-10-2\sqrt{5}}{16}} \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i
\end{aligned}$$

Die Nullstellen $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$, $z_3 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$, $z_4 = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$, $z_5 = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ des Polynoms $z^5 - 1 = 0$ bilden somit die Lösungen in $\mathbb{C}$ für $z^5 = 1$.

b.) Man zeige, daß die Lösungen in Bezug auf die Multiplikation eine zyklische Gruppe bilden. Man gebe Erzeuger an.

Die Lösungen bilden eine Gruppe $(G, \bullet)$ mit der Multiplikation, ihre Abgeschlossenheit erkennt man anhand der Gruppentafel:



$\bullet$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_2	z_2	z_5	z_1	z_3	z_4
z_3	z_3	z_1	z_4	z_5	z_2
z_4	z_4	z_3	z_5	z_2	z_1
z_5	z_5	z_4	z_2	z_1	z_3

Anhand der Gruppentafel erkennt man auch, daß z_1 das neutrale Element der Multiplikation darstellt, und jedes Element ein inverses besitzt (das Ergebnis der Multiplikation ist dann z_1 .)

Da die Elemente $z_1, \dots, z_5$ der Gruppe $(G, \bullet)$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ bilden, und die Multiplikation in $\mathbb{C}$ assoziativ ist, ist auch Assoziativität in dieser Gruppe gegeben.

Weiterhin erkennt man an der Gruppentafel, daß sich jedes Element der Gruppe als eine Potenz von $\zeta = z_4$ darstellen läßt, da $z_4 \cdot z_4 = z_2$ ergibt, $z_2 \cdot z_4 = z_3$, $z_3 \cdot z_4 = z_5$, $z_5 \cdot z_4 = z_1$ und $z_1 \cdot z_4 = z_4$. Somit handelt es sich bei $(G, \bullet)$ um eine zyklische Gruppe mit dem Erzeuger z_4^n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Geometrisch bedeutet dies eine n -fache Rotation des Fünfecks, auf welchem die Elemente der Gruppe liegen.

c.) Für eine Lösung ζ zeige man: $|\zeta^2 - 1| : |\zeta - 1| = g$.

mit $\zeta = z_4$ ist $\zeta^2 = z_2$. Somit ist $|z_4^2 - 1| = |z_2 - 1|$:

$$\begin{aligned}
 |z_2 - 1| &= \sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{5}+4}{4}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{25+2\cdot 5\cdot \sqrt{5}+5}{16} + \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{30+10\sqrt{5}}{16} + \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{30+10\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{40+8\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} \\
 &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}
 \end{aligned}$$

Und $|\zeta - 1| = |z_4 - 1|$:

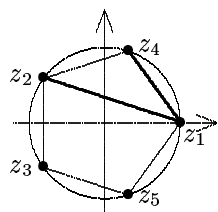
$$\begin{aligned}
 |z_4 - 1| &= \sqrt{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4}\right)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{1-\sqrt{5}+4}{4}\right)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(-\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{25-2\cdot 5\cdot \sqrt{5}+5}{16} + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{30-10\sqrt{5}}{16} + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{40-8\sqrt{5}}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}
\end{aligned}$$

Somit ist $|\zeta^2 - 1|/|\zeta - 1|$:

$$\begin{aligned}
\frac{|z_2 - 1|}{|z_4 - 1|} &= \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d.) Man deute dies Ergebnis am regelmäßigen Fünfeck.



Trägt man die Punkte $z_1, \dots, z_5$ am Einheitskreis auf, so ist mit $\zeta = z_4$ $\zeta^2 = z_4$.

$|\zeta^2 - 1|$ ist somit nichts anderes als der Abstand des Punktes z_2 von Punkt z_1 , und $|\zeta - 1|$ der zwischen z_4 und z_1 .

Da es sich hier um ein regelmäßiges Fünfeck handelt, und z_1 ohne Einschränkung gewählt wurde, läßt sich daraus schließen, daß das Verhältnis des Abstandes eines Punktes zum nächsten und zum übernächsten immer gleich g ist.

Zusatz

Folgendes Programm berechnet die Gruppentafel:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
```

```
void main(void)
```

```

{
    float z1r,z1i;
    float z2r,z2i;
    float z3r,z3i;
    float z4r,z4i;
    float z5r,z5i;
    z1r=1;z1i=0;
    z2r=-.80;z2i=.58;
    z3r=-.80;z3i=-.58;
    z4r=.30;z4i=.95;
    z5r=.30;z5i=-.95;

    printf("%5.2f %5.2f\n", (z1r*z1r-z1i*z1i), (z1i*z1r+z1r*z1i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z1r*z2r-z1i*z2i), (z1i*z2r+z1r*z2i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z1r*z3r-z1i*z3i), (z1i*z3r+z1r*z3i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z1r*z4r-z1i*z4i), (z1i*z4r+z1r*z4i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z1r*z5r-z1i*z5i), (z1i*z5r+z1r*z5i));
    printf("--\n");
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z2r*z1r-z2i*z1i), (z2i*z1r+z2r*z1i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z2r*z2r-z2i*z2i), (z2i*z2r+z2r*z2i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z2r*z3r-z2i*z3i), (z2i*z3r+z2r*z3i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z2r*z4r-z2i*z4i), (z2i*z4r+z2r*z4i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z2r*z5r-z2i*z5i), (z2i*z5r+z2r*z5i));
    printf("--\n");
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z3r*z1r-z3i*z1i), (z3i*z1r+z3r*z1i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z3r*z2r-z3i*z2i), (z3i*z2r+z3r*z2i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z3r*z3r-z3i*z3i), (z3i*z3r+z3r*z3i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z3r*z4r-z3i*z4i), (z3i*z4r+z3r*z4i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z3r*z5r-z3i*z5i), (z3i*z5r+z3r*z5i));
    printf("--\n");
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z4r*z1r-z4i*z1i), (z4i*z1r+z4r*z1i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z4r*z2r-z4i*z2i), (z4i*z2r+z4r*z2i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z4r*z3r-z4i*z3i), (z4i*z3r+z4r*z3i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z4r*z4r-z4i*z4i), (z4i*z4r+z4r*z4i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z4r*z5r-z4i*z5i), (z4i*z5r+z4r*z5i));
    printf("--\n");
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z5r*z1r-z5i*z1i), (z5i*z1r+z5r*z1i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z5r*z2r-z5i*z2i), (z5i*z2r+z5r*z2i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z5r*z3r-z5i*z3i), (z5i*z3r+z5r*z3i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z5r*z4r-z5i*z4i), (z5i*z4r+z5r*z4i));
    printf("%5.2f %5.2f\n", (z5r*z5r-z5i*z5i), (z5i*z5r+z5r*z5i));
}

```

4.) Man betrachte die Menge aller reellen 2×2 -Matrizen vom Typ $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ und zeige, daß diese mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bildet, der einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper besitzt. Man gebe ein Element J mit $J^2 = -E$ an.

Behauptung 1 Sei $K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. $(K, +, \bullet)$ bildet mit den üblichen Additionen und Multiplikationen von Matrizen einen Körper. Dazu muß man zeigen, daß $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \bullet)$ jeweils eine Gruppe bilden. Eine Gruppe ist abgeschlossen, assoziativ, besitzt ein neutrales Element und für jedes Element ein inverses.

Behauptung 2: $(K, +)$ bildet eine Gruppe.

Beweis: Durch anwenden der Gruppenaxiome

Abgeschlossenheit Addition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ ist ein Element von K , also ist $(K, +)$ abgeschlossen.

Assoziativität Addition

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -(b+d+f) & a+c+e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ -d-f & c+e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ -(b+d+f) & a+c+e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $(K, +)$ assoziativ.

Kommutativität Addition

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c+a & d+b \\ -(d+b) & c+a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $(K, +)$ kommutativ.

Neutrales Element Addition Das neutrale Element der Addition ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ -b+0 & a+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Wegen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in K$ besitzt K somit ein neutrales Element bezüglich der Addition. Da $(K, +)$ kommutativ ist, ist es sowohl rechts- als auch linksneutral. Damit ist $(K, +)$ nicht leer.

Inverses Element Addition Das inverse Element $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$ ist $\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ -(b+(-b)) & a+(-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit besitzt jedes Element aus K auch ein inverses, welches ebenfalls in K liegt. Da $(K, +)$ kommutativ ist, handelt es sich dabei sowohl um das links- als auch das rechtsinverse Element.

Damit ist $(K, +)$ eine kommutative Gruppe, Behauptung 2 wurde bewiesen.

Behauptung 3: $(K \setminus \{0\}, \bullet)$ bildet eine Gruppe.

Beweis: Durch anwenden der Gruppenaxiome

Abgeschlossenheit Multiplikation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ ist ein Element aus K , also ist $(K, \bullet)$ abgeschlossen.

Assoziativität Multiplikation

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ace - bde - adf - bcf & acf - bdf + ade + bce \\ -ade - bce - acf + bdf & -adf - bcf + ace - bde \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ace - adf - bcf - bde & acf + ade + bce - bdf \\ -acf - ade - bce + bdf & ace - adf - bcf - bde \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} ce - df & cf + de \\ -cf - de & ce - df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ace - adf - bcf - bde & acf + ade + bce - bdf \\ -bce + bdf - acf - ade & -bcf - bde + ace - adf \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ace - adf - bcf - bde & acf + ade + bce - bdf \\ -acf - ade - bce + bdf & ace - adf - bcf - bde \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist $(K, \bullet)$ assoziativ.

Kommutativität Multiplikation

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ca - db & cb + da \\ -(cb + da) & ca - db \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist $(K, \bullet)$ kommutativ.

Neutrales Element Multiplikation

Das neutrale Element der Multiplikation ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ -b \cdot 1 + a \cdot 0 & (-b) \cdot 0 + a \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wegen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ besitzt K ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation. Da $(K, \bullet)$ kommutativ ist, handelt es sich hierbei sowohl um das links- als auch rechtsneutrale Element. Damit ist $(K, \bullet)$ nicht leer.

Inverses Element Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

als Ergebnis das neutrale Element herauskommt, muß $ac - bd = 1$ und $ad + bc = 0$ gelten:

$$\begin{array}{rclcl}
 I & ac & - & bd & = 1 \\
 II & ad & + & bc & = 0 \\
 \hline
 II' & & & ad & = -bc \\
 II'' & & & d & = -\frac{b}{a}c \\
 I' & ac & - & b \cdot \left(-\frac{b}{a}c\right) & = 1 \\
 I'' & \frac{a^2}{a}c & + & \frac{b^2}{a}c & = 1 \\
 I''' & c & \cdot & \frac{a^2+b^2}{a} & = 1 \\
 I'''' & & & c & = \frac{a}{a^2+b^2} \\
 \hline
 II'''' & & & d & = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \\
 II''''' & & & d & = -\frac{b}{a^2+b^2}
 \end{array}$$

Das inverse Element $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$ ist somit $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. Da $(K, \bullet)$ kommutativ ist, handelt es sich sowohl um das links- als auch rechtsinverse Element.

Somit ist $(K \setminus \{0\}, \bullet)$ eine kommutative Gruppe, die Behauptung 3 wurde bewiesen.

Da $(K, +)$ eine Gruppe ist, und $(K \setminus \{0\}, \bullet)$ und beide aufgrund ihrer neutralen Elemente nicht leer sind, ist $(K, +, \bullet)$ ein Körper, damit wurde Behauptung 1 gezeigt.

q.e.d.

Zu $\mathbb{R}$ isomorpher Unterkörper.

Behauptung 4: Mit $b := 0$ und $a \in \mathbb{R}$ entsteht ein Unterkörper, welcher isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterkörper von K . $U \subset K$.

Abgeschlossenheit von $(U, +)$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in U, \text{ somit ist } (U, +) \text{ abgeschlossen.}$$

Abgeschlossenheit von $(U, \bullet)$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - 00 & a0 + 0b \\ -a0 - 0b & ab - 00 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \in U, \text{ somit ist } (U, \bullet) \text{ abgeschlossen.}$$

Da es sich bei U um einen Unterkörper von K handelt, gelten auch hier wieder die Körperaxiome von K . Die neutralen Elemente der Addition und Multiplikation von K liegen auch in U .

Die bijektive Abbildung φ zwischen U und $\mathbb{R}$ ist dann definiert als

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow U \\ \varphi : x &\longrightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Homomorphismusaxiome $\varphi(x) + \varphi(y) \stackrel{!}{=} \varphi(x+y)$ und $\lambda\varphi(x) \stackrel{!}{=} \varphi(\lambda x)$ ergeben durch nachrechnen

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi(y) &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \\ \varphi(x+y) &= \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \\ \lambda\varphi(x) &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda 0 \\ \lambda 0 & \lambda x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & 0 \\ 0 & \lambda x \end{pmatrix} \\ \varphi(\lambda x) &= \begin{pmatrix} \lambda x & 0 \\ 0 & \lambda x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

daß es sich bei φ um einen Homomorphismus handelt. Da φ per Definition bijektiv ist, ist es sich damit um einen Isomorphismus.

Somit ist der Unterkörper U zu $\mathbb{R}$ isomorph, also existiert in K ein zu $\mathbb{R}$ isomorpher Unterkörper.

Element J mit $J^2 = -E$

Das neutrale Element der Addition E ist definiert als $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit

$$\text{ist } -E = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit bei einer Multiplikation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} aa - bb & ab + ba \\ -ab - ba & aa - bb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Ergebnis $-E$ herauskommt, muß $a^2 - b^2 = -1$ und $2ab = 0$ gelten. Dies ist der Fall, wenn für $a := 0$ und für $b := 1$ angenommen wird. Die Matrix J ist somit definiert als

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$