

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 8

Beth Scorer, 5643272
Fabian Schulz, 5575935
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für die Fälle

a.) $a_n = n^s$, ($s \in \mathbb{Q}$)

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums ergibt sich:

$$\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} = \frac{(n+1)^s z^{n+1}}{n^s z^n} = \frac{(n+1)^s}{n^s} z = \left(\frac{n+1}{n} \right)^s z$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^s = 1$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} = z$$

Damit konvergiert die Reihe, wenn $|z| < 1$ ist, damit ist der Konvergenzradius 1.

b.) $a_n = q^{n^2}$, ($q \in \mathbb{C}$)

Mit Hilfe des Wurzelkriteriums ergibt sich:

$$\sqrt[n]{a_n z^n} = \sqrt[n]{q^{n^2} z^n} = q^n z$$

Also muß

$$q^n z < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{|q|^n}$$

gelten, damit die Reihe konvergiert. Also ist der Konvergenzradius $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|q|^n}$.

c.) $a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

Mit Hilfe des Wurzelkriteriums ergibt sich:

$$\sqrt[n]{a_n z^n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} z^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n z$$

Wegen

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Also muß

$$ez < 1 \Leftrightarrow z < \frac{1}{e}$$

gelten, damit die Reihe konvergiert. Also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{e}$.

2.) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Man zeige, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist, nicht jedoch das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst.

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

Daher bilden die Folgenglieder eine Nullfolge, außerdem ist die Reihe alternierend, daher konvergiert sie nach dem Leibnizkriterium.

Für das Cauchyprodukt über $\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n+1-k}}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (k+1) &= (n+1) & \text{falls } n &= k \\ (k+1) &< (n+1) & \text{falls } n &> k \\ (n+1-k) &= (n+1) & \text{falls } k &= 0 \\ (n+1-k) &< (n+1) & \text{falls } k &> 0 \end{aligned}$$

und

$$(-1)^k (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 \cdot 1 = 1 & \text{falls } k \text{ gerade, } n \text{ gerade} \\ (-1) \cdot (-1) = 1 & \text{falls } k \text{ ungerade, } n \text{ gerade} \\ 1 \cdot (-1) = -1 & \text{falls } k \text{ gerade, } n \text{ ungerade} \\ (-1) \cdot 1 = -1 & \text{falls } k \text{ ungerade, } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt für $n > 2$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n+1-k}} \right| &> \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n+1}} \right| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{n-k}}{n+1} \right| \\ &= \left| \underbrace{\frac{\pm 1}{n+1} + \dots + \frac{\pm 1}{n+1}}_{n+1 \text{ mal}} \right| = \frac{n+1}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

Damit ist dieses Cauchyprodukt für $n > 2$ größer als 1. Damit existiert eine Möglichkeit das Cauchyprodukt zu bilden, so daß das Ergebnis größer als 1 ist. Damit konvergiert die ursprüngliche Reihe nicht absolut.

q.e.d.

3.) Seien a, b, c komplexe Zahlen, $c \neq 0, -1, -2, \dots$

a.) Man zeige, daß die hypergeometrische Reihe $F(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}z^3 + \dots$ im Allgemeinen den Konvergenzradius 1 hat und diskutiere die Ausnahmefälle.

Mit dem Quotientenkriterium errechnet sich für a_{n+1}/a_n

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{a(a+1) \dots (a+n)(a+n+1)b(b+1) \dots (b+n)(b+n+1)}{(n+1)!c(c+1) \dots (c+n)(c+n+1)} z^{n+1}}{\frac{a(a+1) \dots (a+n)b(b+1) \dots (b+n)}{n!c(c+1) \dots (c+n)} z^n} \\ &= \frac{a \dots (a+n)(a+n+1)b \dots (b+n)(b+n+1)n!c(c+1) \dots (c+n)z^{n+1}}{(n+1)!c(c+1) \dots (c+n)(c+n+1)a \dots (a+n)b \dots (b+n)z^n} \\ &= \frac{a \dots (a+n)(a+n+1)b \dots (b+n)(b+n+1)n!c(c+1) \dots (c+n)z^{n+1}}{a \dots (a+n)b \dots (b+n)(n+1)!c(c+1) \dots (c+n)(c+n+1)z^n} \\ &= \frac{(a+n+1)(b+n+1)z}{(n+1)(c+n+1)} = \frac{(n+a+1)(n+b+1)}{(n+1)(n+c+1)} z \end{aligned}$$

Da für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a+1)(n+b+1)}{(n+1)(n+c+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a+1)}{(n+1)} \cdot \frac{(n+b+1)}{(n+c+1)} = 1 \cdot 1 = 1$$

gilt, gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a+1)(n+b+1)}{(n+1)(n+c+1)} z = z$$

Damit die Reihe konvergiert, muß also $z < 1$ gelten, also ist der Konvergenzradius 1.

Setzt man hingegen für a oder b Werte der Menge

$$\{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

ein, so ergibt sich im Zähler der Brüche irgendwann der Faktor

$$(a + |a|) = 0 \quad \vee \quad (b + |b|) = 0$$

so daß das Produkt mit ihnen 0 ergibt. Diese Reihen konvergieren unabhängig von z , ihr Konvergenzradius ist daher unendlich.

b.) Man stelle die geometrische Reihe, die Logarithmusreihe $L(z)$ und die Binomialreihe $B_s(z)$ durch $F(a, b, c; z)$ mit geeignetem a, b, c dar.

Die allgemeine Potenzreihe sei definiert als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Geometrische Reihe: $G(x) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ Die Geometrische Reihe ist definiert als

$$G(x) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

Dies bedeutet, daß alle $a_n = 1$ ergeben müssen. Mit $a = b = c = 1$ ergibt sich für a_n :

$$a_n := \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)b(b+1) \cdots (b+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n c(c+1) \cdots (c+n-1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{n!n!}{n!n!} = 1$$

Daher läßt sich die geometrische Reihe mit $a = b = c = 1$ durch die hypergeometrische Reihe ausdrücken.

Binomialreihe: $B_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$ Die Binomialreihe ist definiert als

$$B_s(x) = 1 + \frac{s}{1}x^2 + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2}x^3 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^4 + \dots$$

Dies bedeutet, daß alle $a_n = \frac{s(s-1) \cdots (s-n+1)}{n!}$ sein müssen. Mit $a = s - n + 1$, $b = c = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)b(b+1) \cdots (b+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot c(c+1) \cdots (c+n-1)} \\ &= \frac{(s-n+1)(s-n+1+1) \cdots (s-n+1+n-1)1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n} \\ &= \frac{(s-n+1)(s-n+2) \cdots sn!}{n!n!} \\ &= \frac{s \cdots (s-n+2)(s-n+1)}{n!} \end{aligned}$$

Daher läßt sich die Binomialreihe mit $a = s - n + 1$, $b = c = 1$ durch die hypergeometrische Reihe ausdrücken.

Logarithmusreihe: $L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ Die Logarithmusreihe ist definiert als

$$L(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Dies bedeutet, daß alle $a_n = \frac{(-1)^n}{n}x$ ergeben müssen. Mit $a = b = 1, c = 2$ und ergibt sich für a_n :

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)b(b+1) \cdots (b+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot c(c+1) \cdots (c+n-1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)} \\ &= \frac{n!n!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Außerdem ist $(-\sqrt[n]{xx})^n = (-1)^n \sqrt[n]{x^n} x^n = (-1)^n x x^n = (-1)^n x^{n+1}$.

Damit läßt sich die Logarithmusreihe mit $a = b = 1, c = 2, z = -\sqrt[n]{xx}$ ausdrücken.

4.) Berechnung der Fibonacci-Zahlen f_n :

a.) Die Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n$ hat den Konvergenzradius $1/g$; ($g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

Nach dem Quotientenkriterium gilt

$$\frac{f_{n+1} z^{n+1}}{f_n z^n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} z$$

Da für Fibonacci-Zahlen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = g$$

gilt (Aufgabenzettel Blatt 7, Aufgabe 3iii), gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1} z^{n+1}}{f_n z^n} = gz$$

Fordert man $gz < 1$ so erhält man $z < \frac{1}{g}$. Damit ist der Konvergenzradius $\frac{1}{g}$.

b.) Für $|z| < 1/g$ gilt: $(1 - z - z^2) \cdot f(z) = 1$.

$(1 - z - z^2)f(z)$ läßt sich ausdrücken als

$$f(z) - zf(z) - z^2 f(z)$$

Wobei die unendlichen Reihen wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} f(z) &: f_1 + f_2 z + f_3 z^2 + f_4 z^3 + f_5 z^4 + \dots \\ zf(z) &: f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + f_4 z^4 + f_5 z^5 + \dots \\ z^2 f(z) &: f_1 z^2 + f_2 z^3 + f_3 z^4 + f_4 z^5 + f_5 z^6 + \dots \end{aligned}$$

Da für $|z| < \frac{1}{g}$ die Reihe absolut konvergiert, gilt in ihr Kommutativität:

$$\begin{aligned} (1 - z - z^2)f(z) &= f_1 + f_2z + f_3z^2 + f_4z^3 + f_5z^4 + \dots - f_1z - f_2z^2 - f_3z^3 - f_4z^4 - f_5z^5 - \dots \\ &\quad - f_1z^2 - f_2z^3 - f_3z^4 - f_4z^5 - f_5z^6 - \dots \\ &= f_1 + f_2z - f_1z + f_3z^2 - f_2z^2 - f_1z^2 + f_4z^3 - f_3z^3 - f_2z^3 + f_5z^4 - f_4z^4 - f_3z^4 + \dots \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen gilt

$$= f_1 + f_2z - f_1z + f_1z^2 + f_2z^2 - f_2z^2 - f_1z^2 + f_2z^3 + f_3z^3 - f_3z^3 - f_2z^3 + f_3z^4 + f_4z^4 - f_4z^4 - \dots$$

Dabei fällt auf, daß sich die einzelnen Folgenglieder gegenseitig aufheben, übrig bleibt nur $f_1 + f_2z - f_1z$, mit $f_1 = f_2 = 1$ gilt somit

$$(1 - z - z^2)f(z) = 1$$

c.) Mittels Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{1-z-z^2}$ berechne man die Potenzreihe von f und daraus durch Koeffizientenvergleich $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(g^{n+1} + \frac{(-1)^n}{g^{n+1}} \right)$.