

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 2

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Prüfen Sie, ob folgende Mengen G mit der Verknüpfung $*$ Gruppen sind:

a.) $G := \mathbb{R}, \quad x * y := 3x + 4y$

Behauptung: G ist keine Gruppe, da die Assoziativität der Verknüpfung nicht gegeben ist.

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= 3(3x + 4y) + 4z \\ &= 9x + 12y + 4z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= 3x + 4(3y + 4z) \\ &= 3x + 12y + 16z \end{aligned}$$

Zum Beispiel $x := 0, y := 0, z := 1$:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 4 \cdot 1 &= 4 \\ 9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 16 \cdot 1 &= 16 \end{aligned}$$

Damit gilt das gesagte.

b.) $G := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}, \quad x * y := \frac{x+y}{1+xy}$

Behauptung: $(G, *)$ ist eine Gruppe, da Assoziativität gegeben ist, das neutrale Element 0, und das inverse für alle $x \in G = -x$ und für alle $y \in G = -y$ ist.

Assoziativität ist gegeben:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} & \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} &= x * (y * z) = \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + \frac{z(1+xy)}{1+xy}}{\frac{1+xy}{1+xy} + \frac{x+y}{1+xy} z} & \frac{\frac{1+yz}{1+yz} x + \frac{y+z}{1+yz}}{\frac{1+yz}{1+yz} + x \frac{y+z}{1+yz}} &= \\ &= \frac{\frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy}}{\frac{1+xy+xz+yz}{1+xy}} & \frac{\frac{(1+yz)x+y+z}{1+yz}}{\frac{1+yz+x(y+z)}{1+yz}} &= \\ &= \frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+xz+yz} & \frac{(1+yz)x+y+z}{1+yz+x(y+z)} &= \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} & \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} &= \end{aligned}$$

neutrales Element Das neutrale Element ist 0.

Linksneutralität $y := 0$

$$\frac{x+0}{1+x \cdot 0} = \frac{x}{1} = x$$

Rechtsneutralität $x := 0$

$$\frac{0+y}{1+0 \cdot y} = \frac{y}{1} = y$$

inverses Element Das inverse Element ist $-x$ bzw. $-y$.

Linksinvers $y := -x$

$$\frac{x-x}{1+x \cdot (-x)} = \frac{0}{1-x^2} = 0$$

Rechtsinvers $x := -y$

$$\frac{-y+y}{1+(-y) \cdot y} = \frac{0}{1-y^2} = 0$$

Damit gilt das gesagte.

$$G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left((s, a) * (t, b) \right) := (s + at, ab)$$

Behauptung: $(G, *)$ ist eine Gruppe, da Assoziativität gegeben ist, das neutrale Element $(0, 1)$, und das inverse für alle $(s, a) \in G = \left(-\frac{s}{a}, \frac{1}{a} \right)$ und für alle $(t, b) = \left(-\frac{t}{b}, \frac{1}{b} \right)$ ist.

Assoziativität ist gegeben

$$\begin{aligned} \left((s, a) * (t, b) \right) * (u, c) &= (s + at, ab) * (u, c) \\ &= ((s + at) + (ab)u, (ab)c) \\ &= (s + at + abu, abc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s, a) * \left((t, b) * (u, c) \right) &= (s, a) * (t + bu, bc) \\ &= (s + a(t + bu), a(bc)) \\ &= (s + at + abu, abc) \end{aligned}$$

neutrales Element Das neutrale Element ist $(0, 1)$.

Linksneutralität $(t, b) := (0, 1)$

$$(s, a) * (0, 1) = (s + a \cdot 0, a \cdot 1) = (s, a)$$

Rechtsneutralität $(s, a) := (0, 1)$

$$(0, 1) * (t, b) = (0 + 1 \cdot t, 1 \cdot b) = (t, b)$$

inverses Element Das inverse Element ist $(-\frac{s}{a}, \frac{1}{a})$ bzw. $(-\frac{t}{b}, \frac{1}{b})$.

Linksinvers $(t, b) := (-\frac{s}{a}, \frac{1}{a})$

$$(s, a) * \left(-\frac{s}{a}, \frac{1}{a}\right) = \left(s - a \cdot \frac{s}{a}, a \cdot \frac{1}{a}\right) = \left(s - s, \frac{a}{a}\right) = (0, 1)$$

Rechtsinvers $(s, a) := (-\frac{t}{b}, \frac{1}{b})$

$$\left(-\frac{t}{b}, \frac{1}{b}\right) * (t, b) = \left(-\frac{t}{b} + \frac{1}{b} \cdot t, \frac{1}{b} \cdot b\right) = \left(-\frac{t}{b} + \frac{t}{b}, \frac{b}{b}\right) = (0, 1)$$

Damit gilt das gesagte.

2.) Stellen Sie die Gruppentafel der symmetrischen Gruppe $S(3)$ auf, bestimmen Sie alle Untergruppen. Zeigen Sie, daß $S(3)$ nicht abelsch ist. Schließen Sie daraus, daß auch jede $S(n)$ mit $n \geq 3$ nicht abelsch ist.

$S(3)$ enthält die folgenden 6 Abbildungen:

$$\begin{aligned} a_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & b_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & c_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ d_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & e_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & f_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gruppentafel der symmetrischen Gruppe $S(3)$ sieht wie folgt aus:

$\circ$	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3
a_3	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3
b_3	b_3	a_3	f_3	e_3	d_3	c_3
c_3	c_3	d_3	e_3	f_3	a_3	b_3
d_3	d_3	c_3	b_3	a_3	f_3	e_3
e_3	e_3	f_3	a_3	b_3	c_3	d_3
f_3	f_3	e_3	d_3	c_3	b_3	a_3

Die sechs Untergruppen sind:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Die Gruppe ist nicht abelsch, da sie die Abbildungen

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

enthält. Mit Ihnen ergibt sich für $c_3 \circ d_3$ und $d_3 \circ c_3$

$$c_3 \circ d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad d_3 \circ c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $S(3)$ nicht abelsch.

Behauptung: $S(n)$ ist nicht abelsch für $n \geq 3$.

Beweis per Induktion über n .

Induktionsanfang $n := 3$

$A(n)$: Siehe oben.

Induktionsschritt $A(n) \implies A(n+1)$

Da $S(n+1)$ die Menge aller Permutationen ist, enthält sie auch die Abbildungen

$$c_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 \\ c_n(1) & \cdots & c_n(n) & n+1 \end{pmatrix} \quad d_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 \\ d_n(1) & \cdots & d_n(n) & n+1 \end{pmatrix}$$

Nach Induktionsvoraussetzung unterscheiden sich die ersten n Elemente der Abbildungen $c_{n+1} \circ d_{n+1}$ und $c_{n+1} \circ d_{n+1}$. Damit hat sie verschiedene Ergebnisse, damit ist die Verknüpfung $\circ$ nicht kommutativ, damit ist die Gruppe nicht abelsch.

q.e.d.

3.) Sei G eine Gruppe mit Einselement e , in der $a^2 = e$ gilt für jedes $a \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Bekannt sei $ea = a = ae$, $a^{-1}a = e = aa^{-1}$, $(ab)c = a(bc)$ und $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Wegen $a^2 = aa = e$ für alle $a \in G$ gilt auch $a^{-1}a^{-1} = e$.

Um zu beweisen, daß G abelsch ist, benötigt man noch die Aussage daß $a^{-1} = a$.

$$a = ea = (a^{-1}a^{-1})a = a^{-1}(a^{-1}a) = a^{-1}e = a^{-1}$$

Also gilt somit $a = a^{-1}$.

Nun läßt sich zeigen, daß G abelsch ist:

$$\begin{aligned} ab &= (ab)^{-1} \\ &= b^{-1}a^{-1} \\ &= ba \end{aligned}$$

Somit gilt in G $ab = ba$, also ist G abelsch.

4.) Prüfen sie, ob folgende Abbildungen Homomorphismen von Gruppen sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Kerne dieser Abbildungen.

1. $G := \mathbb{R}^2$ und $H := \mathbb{R}$ mit den üblichen Additionen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := xy$.

f ist ein Homomorphismus, wenn gilt

$$f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Die g_i sind definiert als

$$g_i := \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix}, \quad x_{i1}, x_{i2} \in \mathbb{R}.$$

Damit

$$f(g_1 + g_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}\right) = f(g_1) + f(g_2)$$

Zum Beispiel: $x_{11} := 1, x_{12} := 1, x_{21} := 1, x_{22} := 1$

$$\begin{array}{ccc} (1+1) \cdot (1+1) & & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \\ 2 \cdot 2 & & 1 + 1 \\ 4 & \neq & 2 \end{array}$$

Damit ist f kein Homomorphismus.

2. $G := \mathbb{R}^2$ und $H := \mathbb{R}$ mit den üblichen Additionen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x + y$.

f ist ein Homomorphismus, wenn gilt

$$f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

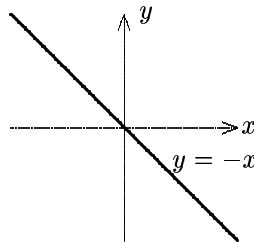
Die g_i sind definiert als

$$g_i := \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix}, \quad x_{i1}, x_{i2} \in \mathbb{R}.$$

Damit

$$\begin{array}{ccc} f(g_1 + g_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}\right) & = & f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}\right) = f(g_1) + f(g_2) \\ f\left(\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}\right) & = & f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}\right) \\ (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22}) & = & (x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} & = & x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \\ x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} & = & x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \end{array}$$

Damit ist f ein Homomorphismus. Das Einselement von H ist 0. Für $x = -y$ bzw. $y = -x$ gilt $x + y = 0$. Den Kern bildet also eine Diagonale mit der Steigung -1 , die im 2. und 4. Quadranten verläuft und durch den Ursprung geht:



3. $G = H$ irgendeine Gruppe, $g \in G$ ein festes Element und $f(x) := gxg^{-1}$

f ist ein Homomorphismus, wenn gilt

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in G$$

Ist g das gleiche feste Element in allen drei Abbildungen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(xy) &= gx yg^{-1} & gxg^{-1} gyg^{-1} &= f(x)f(y) = \\ & & gx(gg^{-1})yg^{-1} &= \\ & & gxe_Gyg^{-1} &= \\ & & gxyg^{-1} & \end{aligned}$$

Damit ist f ein Homomorphismus.

Der Kern dieser Abbildung ist das Einselement:

$$\begin{aligned} f(e_G) &= ge_Gg^{-1} \\ &= gg^{-1} \\ &= e_G = e_H \end{aligned}$$

Da $G = H$ gilt, gilt auch $e_G = e_H$. Eine andere Möglichkeit wäre $g^{-1}g$ als Kern, dies ist jedoch genau gleich e_G .