

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 3

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.)

Eine Äquivalenzrelation $\equiv$ in einer Menge A liegt vor, wenn

- $\forall a \in A : a \equiv a$ (Reflexivität)
- $\forall a, b \in A : a \equiv b \implies b \equiv a$ (Symmetrie)
- $\forall a, b, c \in A : a \equiv b \wedge b \equiv c \implies a \equiv c$ (Transitivität)

gilt.

1. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Definition $a \equiv b :\Leftrightarrow m(a-b) \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}$ definiert.

Reflexivität $a \equiv a$

$$m(a-a) = m \cdot 0 = 0$$

$0 \in \mathbb{Z}$, damit ist die Relation reflexiv.

Symmetrie $(a \equiv b) \Leftrightarrow (b \equiv a)$

„ $\Rightarrow$ “ Wenn $m(a-b) \in \mathbb{Z}$ gilt, so ist $m(b-a) = \underbrace{-1}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{m(a-b)}_{\in \mathbb{Z}}$ ebenfalls $\in \mathbb{Z}$.

„ $\Leftarrow$ “ Wenn $m(b-a) \in \mathbb{Z}$ gilt, so ist $m(a-b) = \underbrace{-1}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{m(b-a)}_{\in \mathbb{Z}}$ ebenfalls $\in \mathbb{Z}$.

Damit ist die Relation symmetrisch.

Transitivität $(a \equiv b) \wedge (b \equiv c) \implies (a \equiv c)$

Wenn $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt, so kann man sie auch schreiben als $a := \frac{a'}{x}$, $b := \frac{b'}{y}$, $c := \frac{c'}{z}$, mit $a', b', c' \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} m_1(a-b) &= m_1\left(\frac{a'}{x} - \frac{b'}{y}\right) = m_1\left(\frac{a'y - b'x}{xy}\right) \\ m_2(b-c) &= m_2\left(\frac{b'}{y} - \frac{c'}{z}\right) = m_2\left(\frac{b'z - c'y}{yz}\right) \\ m_3(a-c) &= m_3\left(\frac{a'}{x} - \frac{c'}{z}\right) = m_3\left(\frac{a'z - c'x}{xz}\right) \end{aligned}$$

Wegen $a', c' \in \mathbb{Z}$ und $x, z \in \mathbb{N}$ liegt $a'z - c'x$ in $\mathbb{Z}$. Mit $m_3 = xz$ gilt somit $m_3(a-c) \in \mathbb{Z}$. Damit ist die Relation transitiv.

Damit ist $a \equiv b :\Leftrightarrow m(a-b) \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation.

2. Zeigen Sie, dass die Definition $a \equiv b :\Leftrightarrow ab^{-1} > 0$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^*$ definiert.

Reflexivität $a \equiv a$

$$aa^{-1} = 1$$

$1 > 0$, damit ist die Relation reflexiv.

Symmetrie $(a \equiv b) \Leftrightarrow (b \equiv a)$

„ $\Rightarrow$ “ $ab^{-1} > 0$ gilt in zwei Fällen:

1. $a > 0 \wedge b^{-1} > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a^{-1}b > 0 \Rightarrow ba^{-1} > 0$
2. $a < 0 \wedge b^{-1} < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a^{-1}b > 0 \Rightarrow ba^{-1} > 0$

„ $\Leftarrow$ “ $ba^{-1} > 0$ gilt in zwei Fällen:

1. $b > 0 \wedge a^{-1} > 0 \Rightarrow b^{-1} > 0 \wedge a > 0 \Rightarrow b^{-1}a > 0 \Rightarrow ab^{-1} > 0$
2. $b < 0 \wedge a^{-1} < 0 \Rightarrow b^{-1} < 0 \wedge a < 0 \Rightarrow b^{-1}a > 0 \Rightarrow ab^{-1} > 0$

Damit ist die Relation symmetrisch.

Transitivität $(a \equiv b) \wedge (b \equiv c) \Rightarrow (a \equiv c)$

Für $a \equiv b$ ergeben sich zwei Fälle:

1. $a > 0, b^{-1} > 0 \Rightarrow b > 0$ Wenn nun auch noch $b \equiv c$ gelten soll, so muß c^{-1} ebenfalls größer als 0 sein. Also ist auch $ac^{-1} > 0$.
2. $a < 0, b^{-1} < 0 \Rightarrow b < 0$ Wenn nun auch noch $b \equiv c$ gelten soll, so muß c^{-1} ebenfalls kleiner als 0 sein. Also ist auch $ac^{-1} > 0$.

Damit ist die Relation transitiv.

Damit ist $a \equiv b :\Leftrightarrow ab^{-1} > 0$ eine Äquivalenzrelation.

2.) Sei G eine Gruppe, und $N \subset G$ eine Untergruppe. N erfülle darüber hinaus $xNx^{-1} = N \forall x \in G$. Zeigen Sie, dass auf der Menge der Nebenklassen $M := \{[a] \mid a \in G\}$, wobei $[a] := aN$, eine Multiplikation $[a][b] := [ab]$, $a, b \in G$ definiert werden kann, und M mit dieser Multiplikation eine Gruppe ist.

Eine Multiplikation $[a][b] = [ab]$ läßt sich folgendermaßen konstruieren:

$$\begin{aligned} [a] &:= aN \\ [b] &:= bN \\ \Rightarrow [a][b] &= aNbN \end{aligned}$$

G ist eine Gruppe, daher gibt es in ihr auch ein neutrales Element e . Für xNx^{-1} ergibt sich mit $x := eN$ somit:

$$\begin{aligned}(eN)N(eN)^{-1} &= N \\ [e][e][e]^{-1} &= N\end{aligned}$$

Mit $N = bNb^{-1}$ gilt nun:

$$aNbN = abNb^{-1}bN = abN(b^{-1}b)N = abNN = ab(eN)N(eN)^{-1} = abN = [ab]$$

Assoziativität

$$([a])([b][c]) = aN(bNcN) = aN(bcNc^{-1}cN) = aN(bcNeN) = [a][bc][e] =$$

3.) Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a^n = 0$. Zeigen Sie, dass die Menge der nilpotenten Elemente ein Ideal in R ist.

Ein Unterring U eines Ringes R heißt Ideal, wenn gilt:

$$\begin{aligned}ar &\in U, \forall a \in U, r \in R \\ ra &\in U, \forall a \in U, r \in R\end{aligned}$$

Da R ein kommutativer Ring ist, genügt es den Fall ru zu betrachten: Wenn U der Unterring der nilpotenten Elemente ist, so gilt für alle $r \in R, a \in U$, daß ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, mit dem

$$r \cdot a^n = 0$$

ergibt. Sei $b := ra$, so gilt mit dem selben n :

$$b^n = (ra)^n$$

Da der Ring kommutativ ist, muß auch der Unterring kommutativ sein, deshalb gilt

$$b^n = (ra)^n = \prod_{i=1}^n (ra) = \prod_{i=1}^n r \cdot \prod_{i=1}^n a = r^n a^n = r^n \cdot 0 = 0$$

Damit ist $ra = b$ ebenfalls ein nilpotentes Element und liegt ebenfalls im Unterring. Damit ist die Menge der nilpotente Elemente ein Ideal.

4.) Zeigen Sie, dass $\{0\}$ und K die einzigen Ideale eines Körpers K sind.

Ein Unterring U eines Körpers $(K, \oplus, \odot)$ ist ein Ideal, wenn gilt:

$$uk \in U \ni ku \quad \forall u \in U, k \in K$$

Nimmt man an, daß $U \subsetneq K$, so ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1: $1_K \in U$

Angenommen, das Einselement 1_K aus K läge in U . Für jedes $K \ni k \notin U$ und $u := 1_K$ ist dann aber $1_K k = k 1_K = k$.

⚡

Also müssen in diesem Fall alle Elemente aus K in U liegen, damit das Ergebnis von $uk = ku$ ebenfalls in U liegt.

Fall 2: $1_K \notin U$

Angenommen, das Einselement 1_K läge nicht in U . Da nun aber für ein $u \in U$, welches ungleich 0 ist, ein inverses Element existiert (schließlich ist $(K \setminus \{0\}, \odot)$ eine Gruppe), so gilt $uu^{-1} = u^{-1}u = 1_K$. Per Definition darf dieses Element aber nicht in U liegen.

⚡

Also dürfen in diesem Fall nur Elemente in U liegen, die in K kein inverses Element besitzen, damit $uk = ku$ in U liegt. Dies ist aber nur bei 0 gegeben.

Insgesamt darf das Ideal eines Körpers somit nur $\{0\}$ oder der Körper selbst sein.

□