

# Übungsaufgaben Lineare Algebra I

## Blatt 1

Agnieszka Słaby, 5498566

Beth Scorer, 5643272

Bibiana Gluski, 5600816

Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

**1.) Sei  $E \subset \mathbb{R}^3$  die Menge der Vektoren  $(x, y, z)$  mit  $x + 2y + 3z = 0$ . Geben Sie zwei Vektoren  $v, w \in E$  an, so daß gilt  $E = \{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$**

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y &= -3z \\ \Leftrightarrow -\frac{x+2y}{3} &= z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v := \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{x+2y}{3} \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -\frac{x'+2y'}{3} \end{pmatrix}$$

Für  $x \neq \gamma x' \vee y \neq \gamma y'$ .

Mit  $x := 1, y := 1, x' := 2, y' := 5$  somit:

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1+2 \cdot 1}{3} \end{pmatrix} & w &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -\frac{2+2 \cdot 5}{3} \end{pmatrix} \\ v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{3}{3} \end{pmatrix} & w &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -\frac{12}{3} \end{pmatrix} \\ v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & w &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\ x &= \alpha + 2\beta \\ y &= \alpha + 5\beta \\ z &= -\alpha - 4\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + 2\beta) + 2 \cdot (\alpha + 5\beta) + 3 \cdot (-\alpha - 4\beta) &= 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\alpha + 10\beta - 3\alpha - 12\beta &= 0 \\ 3\alpha + 12\beta - 3\alpha - 12\beta &= 0 \end{aligned}$$

$$E = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

**2.) Seien  $u := (1, 2, 2)$ ,  $v := (1, 4, 9)$ , und  $w := (1, 8, 27)$ . Läßt sich jeder Vektor aus  $\mathbb{R}^3$  in der Form  $\alpha u + \beta v + \gamma w$  schreiben?**

Die Vektoren  $u$  und  $v$  sind linear unabhängig,

$$\begin{aligned} \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} &= \frac{\langle (1, 2, 2), (1, 4, 9) \rangle}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + 9^2}} \\ &= \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 9}{\sqrt{1 + 4 + 4} \cdot \sqrt{1 + 16 + 81}} \\ &= \frac{1 + 8 + 18}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{98}} \\ &= \frac{27}{3 \cdot \sqrt{98}} \\ \frac{27}{3 \cdot \sqrt{98}} &\neq \frac{27}{3 \cdot \sqrt{81}} \\ \frac{27}{3 \cdot \sqrt{98}} &\neq \frac{27}{3 \cdot 9} \\ \frac{27}{3 \cdot \sqrt{98}} &\neq \frac{27}{27} \\ \frac{27}{3 \cdot \sqrt{98}} &\neq 1 \end{aligned}$$

da zwischen ihnen ein anderer Winkel als  $0^\circ$  und  $180^\circ$  besteht.

Somit kann zwischen ihnen eine Ebene aufgespannt werden, als Stützvektor dient der Nullvektor.

$$E := \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Der Punkt, auf den der Vektor  $w$  vom Ursprung aus zeigt, liegt für keine Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  in dieser Ebene

$$\begin{aligned} I \quad 1 &= \alpha + \beta \\ II \quad 4 &= 2\alpha + 2\beta \\ III \quad 27 &= 2\alpha + 9\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II - 2I \quad 2 &= 2\alpha - 2\alpha + 2\beta - 2\beta \\ 2 &= 0 \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} \end{aligned}$$

Somit kann die Ebene entlang dieses Vektors verschoben werden.

$$R := \alpha u + \beta v + \gamma w, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Diese Schar von Ebenen bildet somit ein Koordinatensystem, durch welches jeder Punkt  $(x, y, z)$  im  $\mathbb{R}^3$  ausgedrückt werden kann.

**3.) Finden Sie für die Ebene  $E := \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + z = -1\}$  eine Parameterdarstellung.**

$$3x - 2y + z = -1 \Leftrightarrow -3x + 2y - 1 = z$$

Damit ist es möglich drei Punkte zu finden, welche auf der Ebene liegen.

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x + 2y - 1 \end{pmatrix}$$

Für  $x$  und  $y$  können drei beliebige Werte eingesetzt werden, solange sie nicht auf einer Gerade liegen. Dies ist bei  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  gegeben.

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 \end{pmatrix} & p_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 \end{pmatrix} & p_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \end{pmatrix} \\ p_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & p_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \cdot 1 - 1 \end{pmatrix} & p_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 \end{pmatrix} \\ p_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & p_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} & p_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als die Spannvektoren der Ebene  $E'$  werden  $u := p_1 - p_2$  und  $v := p_1 - p_3$  ausgewählt.

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} & v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u &= \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 - 0 \\ -1 + 4 \end{pmatrix} & v &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} \\ u &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & v &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

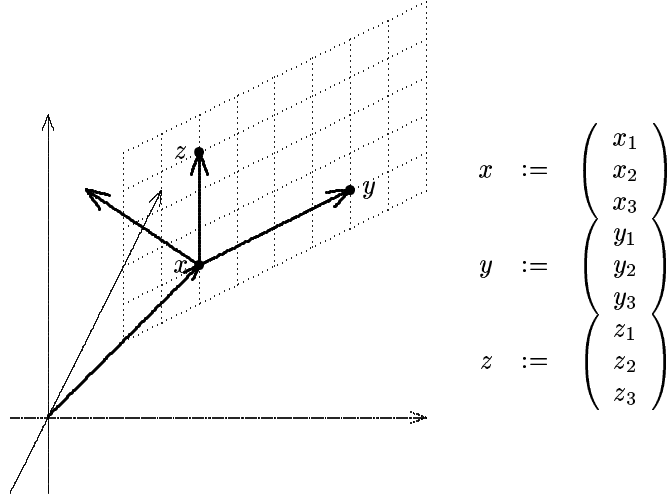
Als Stützvektor dient  $p_1$ , die Ebene  $E'$  ist somit definiert als

$$E' := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4.) Sind  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es genau eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , die diese Punkte enthält. Geben Sie einen Vektor an, der auf dieser Ebene senkrecht steht.

Die Punkte  $(x, y, z)$  liegen nicht auf einer Geraden. Zwischen jeweils zweien von ihnen kann daher ein Vektor gebildet werden.

Zwischen zweien dieser Vektoren lässt sich anschließend eine Ebene aufspannen.



$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ x_3 - z_3 \end{pmatrix}$$

Senkrecht auf dieser Ebene steht der Vektor, welcher aus dem Kreuzprodukt der Spannvektoren entsteht.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ x_3 - z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x_2 - y_2)(x_3 - z_3) - (x_3 - y_3)(x_2 - z_2) \\ (x_3 - y_3)(x_1 - z_1) - (x_1 - y_1)(x_3 - z_3) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - z_2) - (x_2 - y_2)(x_1 - z_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_2x_3 - x_2z_3 - x_3y_2 + y_2z_3) - (x_2x_3 - x_3z_2 - x_2y_3 + y_3z_2) \\ (x_1x_3 - x_3z_1 - x_1y_3 + y_3z_1) - (x_1x_3 - x_1z_3 - x_3y_1 + y_1z_3) \\ (x_1x_2 - x_1z_2 - x_2y_1 + y_1z_2) - (x_1x_2 - x_2z_1 - x_1y_2 + y_2z_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2x_3 - x_2z_3 - x_3y_2 + y_2z_3 - x_2x_3 + x_3z_2 + x_2y_3 - y_3z_2 \\ x_1x_3 - x_3z_1 - x_1y_3 + y_3z_1 - x_1x_3 + x_1z_3 + x_3y_1 - y_1z_3 \\ x_1x_2 - x_1z_2 - x_2y_1 + y_1z_2 - x_1x_2 + x_2z_1 + x_1y_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -x_2z_3 - x_3y_2 + y_2z_3 + x_3z_2 + x_2y_3 - y_3z_2 \\ -x_3z_1 - x_1y_3 + y_3z_1 + x_1z_3 + x_3y_1 - y_1z_3 \\ -x_1z_2 - x_2y_1 + y_1z_2 + x_2z_1 + x_1y_2 - y_2z_1 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$