

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 10

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$ als Funktion von t .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1-t^2 & t-t^3 \\ 0 & t-t^3 & 1-t^4 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1-t^2 & t-t^3 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1-t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.) Bestimmen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda^3 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Damit ist die Matrix invertierbar, solange $\lambda \neq 1$ ist.

3.) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $A = ((1, -1, 2)^T, (2, 3, 7)^T, (2, 3, 6)^T)$, $B = ((1, 2, 2)^T, (-1, 3, 3)^T, (-2, 7, 6)^T)$ gegeben. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $M_B^A(Id)$

4.) Seien $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f : (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \rightarrow (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_4)^T$, $g : (x_1, x_2)^T \rightarrow (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_1)^T$. Sei $A := ((1, 0, 1, 0)^T, (1, 4, 2, 2)^T, (1, 1, 1, 1)^T, (2, 0, 3, 0)^T)$, B die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, $C := ((1, 3, 4)^T, (2, 0, 1)^T, (1, 1, 2)^T)$. Zeigen Sie, dass A eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und C eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von $f, g, g \circ f$ bezüglich der angegebenen Basen.