

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 4

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und 0 das Nullelement in V . Zeigen Sie für $a \in K$, $v \in V$: $\alpha 0 = 0$, $0v = 0$, $v + (-1)v = 0$, $\alpha^{-1}(\alpha v) = v$, falls $\alpha \neq 0$.

Für einen Vektor $v := (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ gilt:

$$\alpha 0 = \alpha(0, \dots, 0) = (\alpha \cdot 0, \dots, \alpha \cdot 0) = (0, \dots, 0) = 0$$

$$0v = 0 \cdot (x_1, \dots, x_n) = (0 \cdot x_1, \dots, 0 \cdot x_n) = (0, \dots, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} v + (-1)v &= (x_1, \dots, x_n) + (-1)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) + (-1 \cdot x_1, \dots, -1 \cdot x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, \dots, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(\alpha v) &= \alpha^{-1}[\alpha(x_1, \dots, x_n)] = \alpha^{-1}(\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n) \\ &= (\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot x_1, \dots, \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot x_n) = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = v \end{aligned}$$

2.) Seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K . Geben Sie einen linearen Isomorphismus $(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)$ an.

3.) Sei K ein Körper und $\varphi : K^n \rightarrow K$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es Skalare $a_1, \dots, a_n \in K$ gibt, so dass für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ gilt: $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Eine Abbildung ist linear, wenn gilt

i.) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

ii.) $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$

Behauptung: Nach der zweiten Eigenschaft gilt mit $\lambda := 0$: $\varphi(0 \cdot u) = 0 \cdot \varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(0) = 0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 0$ Für den Nullvektor lassen sich somit beliebige Werte für $a_i \in K$ einsetzen. Für alle anderen Vektoren lassen sich Werte aus K finden, so daß $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ gilt.

Beweis: Per Induktion über die Anzahl m von 0 verschiedener Komponenten in x :

Induktionsanfang $m := 1$

Wenn fast alle $x_i = 0$, und nur ein $x_j \neq 0$, so besitzt dieses im Körper K ein multiplikatives Inverses x_j^{-1} . Wählt man für a_j nun $\varphi(x)x_j^{-1}$, so ist

die Summe

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_j \cdot x_j + \dots + a_n \cdot 0 = a_j \cdot x_j = \varphi(x) x_j^{-1} x_j = \varphi(x)$$

$\varphi(x) \in K$, $x_j^{-1} \in K$, wegen der Abgeschlossenheit von $(K, \cdot)$ liegt auch $\varphi(x) x_j^{-1}$ in K , damit existiert ein $a_j \in K$ welches die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Induktionsschritt $A(m) \implies A(m+1)$

Ein Vektor x läßt sich auch als Summe von Vektoren $(x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n)$ schreiben.

Wegen der Eigenschaft i.) von linearen Abbildungen muß

$$\varphi\left((x_1, 0, \dots, 0), + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n)\right)$$

somit gleich

$$\varphi\left((x_1, 0, \dots, 0)\right) + \varphi\left((0, x_2, 0, \dots, 0)\right) + \dots + \varphi\left((0, \dots, 0, x_n)\right) \quad (*)$$

sein.

Für jede Abbildung φ in der Zeile $(*)$ existiert per Induktionsvoraussetzung ein $a_j \in K$, so daß $a_j \cdot (0, \dots, x_j, \dots, 0) = \varphi\left((0, \dots, x_j, \dots, 0)\right)$ gilt.

Damit existieren Skalare $a_1, \dots, a_n \in K$, so daß für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

gilt.

q.e.d.

4.) Seien $G_i, H_i (i = 1, 2, 3)$ abelsche Gruppen. Die Gruppenhomomorphismen $f_i, g_i, h_i (i = 1, 2, 3)$ mögen die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_2 & \xrightarrow{g_2} & G_3 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & H_2 & \xrightarrow{h_2} & H_3 \end{array}$$

(a) g_1, h_1 sind injektiv, g_2, h_2 sind surjektiv,

(b) $\text{im}(g_1) = \ker(g_2)$ und $\text{im}(h_1) = \ker(h_2)$,

(c) $h_1 \circ f_1 = f_2 \circ g_1$ und $h_2 \circ f_2 = f_3 \circ g_2$

Zeigen Sie die beiden Aussagen

1. Sind f_1, f_3 injektiv, so ist f_2 injektiv.
2. Sind f_1, f_3 surjektiv, so ist f_2 surjektiv.

g_1, h_1 sind injektiv

$$\begin{aligned}\forall a, b \in G_1 : g_1(a) &= g_1(b) \Leftrightarrow a = b \\ \forall c, d \in H_1 : h_1(c) &= h_1(d) \Leftrightarrow c = d\end{aligned}$$

g_2, h_2 sind surjektiv

$$\begin{aligned}\forall a \in G_3 \exists b \in G_2 : a &= g_2(b) \\ \forall c \in H_3 \exists d \in H_2 : c &= h_2(d)\end{aligned}$$