

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 5

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Sei V ein Vektorraum und seien U_1, U_2 Untervektorräume von V . Ist $U_1 \cup U_2 = V$, dann gilt $U_1 = V$ oder $U_2 = V$.

Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist definiert als

$$u \in U_1 \cup U_2 \Leftrightarrow u \in U_1 \vee u \in U_2$$

Sei

$$v = u_1 + u_2, \quad v \in V, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2$$

Da der Vektor v in der Vereinigungsmenge liegt, muß er somit aus einem der beiden Untervektorräume U_1 oder U_2 stammen.

Angenommen, $v \in U_1$, damit muß wegen

$$v = u_1 + u_2 \quad \Leftrightarrow \quad v + (-1) \cdot u_1 = u_2$$

aufgrund der Abgeschlossenheit von Vektorräumen bezüglich der Addition u_2 ebenfalls in U_1 liegen. Also bildet u_2 eine Teilmenge von U_1 . Da dann $U_2 \setminus U_1 = \emptyset$ ist, liegen alle Vektoren aus V auch in U_1 .

Analog dazu kann man annehmen, daß $v \in U_2$ liegt. Dann ergibt sich wegen

$$v = u_1 + u_2 \quad \Leftrightarrow \quad v + (-1) \cdot u_2 = u_1$$

daß U_1 eine Teilmenge von U_2 sein muß. Also bildet u_2 eine Teilmenge von U_2 . Da dann $U_1 \setminus U_2 = \emptyset$ ist, liegen alle Vektoren aus V auch in U_2 .

Da also $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt, allerdings $U_1 \cup U_2 = V$ ergibt, muß somit $V = U_1$ bzw. $V = U_2$ gelten.

q.e.d.

2.) Seien U, V Untervektorräume eines Vektorraumes W . Zeigen Sie: $(U + V) \setminus (U \cap V) \cong U \setminus (U \cap V) \oplus V \setminus (U \cap V)$

$$(U + V) \setminus (U \cap V) = \{u + v \mid u \in U, v \in V, (u + v \in U \wedge u + v \notin V) \vee (u + v \notin U \wedge u + v \in V)\}$$

$$U \setminus (U \cap V) \oplus V \setminus (U \cap V) = \{(u, v) \mid u \in U \wedge u \notin V, v \in V \wedge v \notin U\}$$

3.) Seien $v_1, \dots, v_r$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, $r \leq n$, mit $v_i \neq 0 \forall i \leq r$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j, i, j \leq r$. Dann ist die Familie $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig.

Behauptung: Die Familie $(v_1, \dots, v_r)$, $v_i \in \mathbb{R}^n$ ist linear unabhängig, wenn für alle $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

Beweis: Per Induktion über r .

Induktionsanfang $A(2)$

$$r := 2$$

Angenommen, zwei Vektoren v_i und v_j sind nicht linear unabhängig. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$v_j = \lambda v_i$$

Für $\langle v_i, v_j \rangle$ ergibt sich somit:

$$\langle v_i, v_j \rangle = v_{i_1} v_{j_1} + v_{i_2} v_{j_2} + \dots = \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu} v_{j_\nu}$$

Wegen $v_j = \lambda v_i$ somit

$$\langle v_i, \lambda v_i \rangle = \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu} \lambda v_{i_\nu} = \lambda \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu}^2$$

Da Quadrate im $\mathbb{R}^n$ immer positiv sind, kann diese Reihe nur im trivialen Fall $\lambda = 0$ bzw. $v_i = 0$ den Wert 0 ergeben. $v_i = 0$ ist aber per Definition ausgeschlossen, mit $\lambda = 0$ wäre v_j der Nullvektor.



Damit müssen zwei von 0 verschiedene Vektoren v_i und v_j genau dann linear unabhängig sein, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ist.

Induktionsschritt $A(r) \implies A(r+1)$

Angenommen der Vektor v_{r+1} wäre linear aus den linear unabhängigen Vektoren $(v_1, \dots, v_r)$ kombinierbar. Somit existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so daß

$$v_{r+1} = \sum_{\nu=1}^r \lambda_\nu v_\nu$$

Mit $\langle v_i, v_{r+1} \rangle$ (für ein $1 \leq i \leq r$) ergibt sich somit

$$\langle v_i, v_{r+1} \rangle = \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu} \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu v_{\mu_\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 v_{i_1} v_{1_1} + \lambda_2 v_{i_1} v_{2_1} + \dots + \lambda_i v_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_r v_{i_1} v_{r_1} + \lambda_1 v_{i_2} v_{1_2} + \dots \\
&\quad \dots + \lambda_1 v_{i_n} v_{1_n} + \dots + \lambda_r v_{i_n} v_{r_n} \\
&= \lambda_1 (v_{i_1} v_{1_1} + v_{i_2} v_{1_2} + \dots + v_{i_n} v_{1_n}) + \lambda_2 (v_{i_1} v_{2_1} + \dots + v_{i_n} v_{2_n}) + \dots \\
&\quad \dots + \lambda_i (v_{i_1} v_{i_1} + \dots + v_{i_n} v_{i_n}) + \dots + \lambda_r (v_{i_1} v_{r_1} + \dots + v_{i_n} v_{r_n}) \\
&= \lambda_1 \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu} v_{1_\nu} + \lambda_2 \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu} v_{2_\nu} + \dots + \lambda_r \sum_{\nu=1}^n v_{i_\nu} v_{r_\nu} \\
&= \lambda_1 \langle v_i, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_i, v_2 \rangle + \dots + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \lambda_r \langle v_i, v_r \rangle
\end{aligned}$$

Da nach I.V. v_i linear unabhängig von allen anderen Vektoren ist, muß sich für die Skalarprodukte $\langle v_i, v_j \rangle$, $i \neq j$ somit 0 ergeben. Also ist

$$\langle v_i, v_{r+1} \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

Dies kann nur 0 ergeben, wenn $v_i = 0$ gilt, oder wenn $\lambda_i = 0$ gilt, also v_{r+1} linear unabhängig von v_i ist.



Somit ist das Skalarprodukt $\langle v_i, v_{r+1} \rangle$ genau dann gleich 0, wenn v_{r+1} von v_i linear unabhängig ist. Da i beliebig gewählt wurde, muß v_{r+1} somit linear unabhängig allen Vektoren $v_1, \dots, v_r$ sein.

Die Familie $(v_1, \dots, v_r)$ ist somit genau dann linear unabhängig, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$, $i, j \leq r$ gilt.

q.e.d.

4.) Betrachte die Untervektorräume $U := L((1, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (-1, 3, 0, 3))$, $W := L((0, 3, 2, 2), (0, 0, 2, 0))$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie Basen und Dimensionen von $U, W, U \cap W, U + W$.

U

Eine Basis des Untervektorraumes $U := L((1, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (-1, 3, 0, 3))$ ist $L((1, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -1))$, da der Vektor $(-1, 3, 0, 3)$ linear aus ihr abgeleitet werden kann:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren $(1, 3, 0, 1)$ und $(1, 0, 0, -1)$ linear unabhängig sind;

$$a \cdot (1, 3, 0, 1) + b \cdot (1, 0, 0, -1) = 0$$

gilt nur im trivialen Fall $a := 0$ und $b := 0$:

$$\begin{array}{rclcl}
 I & 1a & + & 1b & = & 0 \\
 II & 3a & + & 0b & = & 0 \\
 III & 0a & + & 0b & = & 0 \\
 IV & 1a & - & 1b & = & 0 \\
 \hline
 IV' & & & a & = & b \\
 II' & & & a & = & 0
 \end{array}$$

Die Basis besteht somit nur aus zwei linear unabhängigen Vektoren, somit ist die Dimension 2.

W

Eine Basis des Untervektorraumes $V := L((0, 3, 2, 2), (0, 0, 2, 0))$ ist $L((0, 3, 2, 2), (0, 0, 2, 0))$, da die Vektoren $(0, 3, 2, 2)$ und $(0, 0, 2, 0)$ linear unabhängig sind;

$$c \cdot (0, 3, 2, 2) + d \cdot (0, 0, 2, 0) = 0$$

gilt nur im trivialen Fall $c := 0$ und $d := 0$:

$$\begin{array}{rclcl}
 I & 0c & + & 0d & = & 0 \\
 II & 3c & + & 0d & = & 0 \\
 III & 2c & + & 2d & = & 0 \\
 IV & 2c & + & 0d & = & 0 \\
 \hline
 III' & & & c & = & -d \\
 IV' & & & c & = & 0
 \end{array}$$

Somit besteht die Basis aus zwei linear unabhängigen Vektoren, die Dimension ist also 2.

$U \cap W$

Im Schnitt der beiden Untervektorräume liegen diejenigen Vektoren, welche sowohl in U als auch W vorkommen. Dies sind diejenigen, bei denen

$$\begin{aligned}
 a \cdot (1, 3, 0, 1) + b \cdot (1, 0, 0, -1) &= c \cdot (0, 3, 2, 2) + d \cdot (0, 0, 2, 0) \\
 \Leftrightarrow a \cdot (1, 3, 0, 1) + b \cdot (1, 0, 0, -1) - c \cdot (0, 3, 2, 2) - d \cdot (0, 0, 2, 0) &= 0
 \end{aligned}$$

gilt.

$$\begin{array}{rclclcl}
 I & 1a & + & 1b & - & 0c & - & 0d & = & 0 \\
 II & 3a & + & 0b & - & 3c & - & 0d & = & 0 \\
 III & 0a & + & 0b & - & 2c & - & 2d & = & 0 \\
 IV & 1a & - & 1b & - & 2c & - & 0d & = & 0 \\
 \hline
 I' & & & & & & & a & = & -b \\
 II' & & & & & & & c & = & a \\
 \hline
 III' & & & & & & & -2c & = & 2d \\
 IV' & & & a & - & b & + & 2d & = & 0 \\
 IV'' & & & & & a & + & a & + & 2d & = & 0 \\
 IV''' & & & & & & & d & = & -a
 \end{array}$$

c und d hängen somit nur von a ab. Eingesetzt in das Lineare Gleichungssystem, welches den Vektorraum W aufspannt:

$$\begin{aligned}
 & -a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 = & a \cdot \left[(-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 = & a \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\
 = & a \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-3 \\ 2-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} \\
 = & a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Da dies für $a = 0$ der Nullvektor ergibt, und zudem

$$\begin{aligned}
 a \cdot (0, -3, 0, 2) + b \cdot (0, -3, 0, -2) &= (a+b) \cdot (0, -3, 0, 2) \\
 b \cdot (a \cdot (0, -3, 0, 2)) &= (a \cdot b) \cdot (0, -3, 0, 2)
 \end{aligned}$$

gelten, ist $U \cap W$ ebenfalls ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, welcher durch einen einzigen Vektor $(0, -3, 0, 2)$ als Basis aufgespannt wird, und somit die Dimension 1 besitzt.

$U + W$

Die Summe zweier Vektorräume $U + W$ ist definiert als

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Für einen Vektorraum $U = L((1, 3, 0, 1), (1, 0, 0, -1))$ und $W = L((0, 3, 2, 2), (0, 0, 2, 0))$ somit:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sieht man, daß sich der Vektor $(0, 3, 2, 2)$ linear aus den drei anderen herleiten läßt, indem man für a , b und c folgende Werte einsetzt: $a := 1$, $b := -1$, $d = 1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 1 + 0 \\ 3 - 0 + 0 \\ 0 - 0 + 2 \\ 1 + 1 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch ein lineares Gleichungssystem läßt sich überprüfen, daß die restlichen drei Vektoren linear unabhängig sind, da sich nur im trivialen Fall $a := 0$, $b := 0$, $d := 0$ der Nullvektor ergibt:

$$\begin{array}{rclclcl} I & 1a & + & 1b & + & 0d & = & 0 \\ II & 3a & + & 0b & + & 0d & = & 0 \\ III & 0a & + & 0b & + & 2d & = & 0 \\ IV & 1a & - & 1b & + & 0d & = & 0 \\ \hline II' & & & & & a & = & 0 \\ III' & & & & & d & = & 0 \\ IV' & & & & & a & = & b \end{array}$$

Somit bildet $U + W$ einen Untervektorraum, welcher durch die drei Vektoren $(1, 3, 0, 1)$, $(1, 0, 0, -1)$ und $(0, 0, 2, 0)$ als Basis aufgespannt wird. Damit besitzt er die Dimension 3.

Kommt noch Text dazu, versprochen...

Dies läßt sich anhand folgender Formel nachrechnen:

$$\begin{aligned} \dim U + \dim W &= \dim(U \cap W) + \dim(U + W) \\ \Leftrightarrow 2 + 2 &= 1 + 3 \end{aligned}$$