

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 6

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Im $\mathbb{R}^5$ seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3, 4, 0)$, $v_2 = (-1, 1, -2, -3, 3)$, $v_3 = (1, -1, 2, 3, -3)$, $v_4 = (2, 10, 14, 10, 10)$ und $w_1 = (1, 6, 6, 8, 6)$, $w_2 = (1, 2, 1, 0, 3)$, $w_3 = (2, 4, 2, 2, -4)$, $w_4 = (-1, 2, 1, 3, -2)$ gegeben. Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ bzw. $L(w_1, w_2, w_3, w_4)$ bilden.

a.) Der Vektor v_3 lässt sich durch Linearkombination aus den anderen Vektoren darstellen:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für eine Linearkombination $av_1 + bv_2 + cv_4$ lässt sich nur im trivialen Fall $a = b = c = 0$ der Nullvektor ausdrücken:

<i>I</i>	$1a$	$-$	$1b$	$+$	$2c$	$=$	0
<i>II</i>	$2a$	$+$	$1b$	$+$	$10c$	$=$	0
<i>III</i>	$3a$	$-$	$2b$	$+$	$14c$	$=$	0
<i>IV</i>	$4a$	$-$	$3b$	$+$	$10c$	$=$	0
<i>V</i>	$0a$	$+$	$3b$	$+$	$10c$	$=$	0
<i>V'</i>					$10c$	$=$	$-3b$
<i>IV'</i>	$4a$			$+$	$20c$	$=$	0
<i>IV''</i>					$10c$	$=$	$2a$
<i>IV'''</i>					$-3b$	$=$	$2a$
<i>II'</i>	$-3b$	$+$	$1b$	$-$	$3b$	$=$	0
<i>II''</i>					b	$=$	0

Somit sind v_1, v_2 und v_4 linear unabhängig, und bilden somit eine dreidimensionale Basis von $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b.) Für eine Linearkombination $aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4$ lässt sich nur im trivialen Fall $a = b = c = d = 0$ der Nullvektor ausdrücken:

<i>I</i>	$1a$	$+$	$1b$	$+$	$2c$	$-$	$1d$	$=$	0	
<i>II</i>	$6a$	$+$	$2b$	$+$	$4c$	$+$	$2d$	$=$	0	
<i>III</i>	$6a$	$+$	$1b$	$+$	$2c$	$+$	$1d$	$=$	0	
<i>IV</i>	$8a$	$+$	$0b$	$+$	$2c$	$+$	$3d$	$=$	0	
<i>V</i>	$6a$	$+$	$3b$	$-$	$4c$	$-$	$2d$	$=$	0	
<i>VI</i> :	<i>II</i> - 6 <i>I</i>		$-$	$4b$	$-$	$8c$	$+$	$8d$	$=$	0
<i>VII</i> :	<i>III</i> - 6 <i>I</i>		$-$	$5b$	$-$	$10c$	$+$	$7d$	$=$	0
<i>VIII</i> :	<i>IV</i> - 8 <i>I</i>		$-$	$8b$	$-$	$10c$	$+$	$9d$	$=$	0
<i>IX</i> :	<i>V</i> - 6 <i>I</i>		$-$	$3b$	$-$	$16c$	$+$	$6d$	$=$	0
<i>X</i> :	<i>VIII</i> - 2 <i>VI</i>				$6c$	$-$	$7d$	$=$	0	
<i>XI</i> :	<i>3VI</i> - 4 <i>IX</i>				$40c$			$=$	0	

Somit sind w_1, w_2, w_3 und w_4 linear unabhängig, und bilden somit die vierdimensionale Basis von $L(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

2.) Sei $V = \mathbb{Q}[X]$ der $\mathbb{Q}$ -Vektorraum aller Polynome in der Unbestimmten X über dem Körper $\mathbb{Q}$. Ist es möglich, das Polynom $v = X^2 + 4X - 3$ als Linearkombination $f_1 = X^2 - 2X + 5$, $f_2 = 2X^2 - 3X$, $f_3 = X + 3$ zu schreiben? Wenn ja, geben Sie eine solche Linearkombination an.

In Tupelschreibweise seien $f_1 := (5, -2, 1)$, $f_2 := (0, -3, 2)$ und $f_3 := (3, 1, 0)$. Diese Vektoren sind linear unabhängig:

$$\begin{array}{rclclcl}
 I & & 5a & - & 0b & + & 3c & = & 0 \\
 II & & -2a & - & 3b & + & 1c & = & 0 \\
 III & & 1a & + & 2b & & & = & 0 \\
 \hline
 IV & II + 2III & & & 1b & + & 1c & = & 0 \\
 V & I - 5III & & - & 10b & + & 3c & = & 0 \\
 \hline
 VI & V + 10IV & & & & & 13c & = & 0
 \end{array}$$

Somit spannen sie einen Untervektorraum von V auf.

Es ist möglich, das Polynom v durch eine Linearkombination aus $af_1 + bf_2 + cf_3$ auszudrücken:

$$\begin{array}{rclclcl}
 I & & 5a & - & 0b & + & 3c & = & -3 \\
 II & & -2a & - & 3b & + & 1c & = & 4 \\
 III & & 1a & + & 2b & & & = & 1 \\
 \hline
 IV & 2II + 3III & -a & & & + & 2c & = & 11 \\
 V & 2I - 3IV & 13a & & & & & = & -39 \\
 \hline
 VI & & a & & & & & = & -3 \\
 \hline
 VII & & 1 \cdot (-3) & + & 2b & & & = & 1 \\
 VIII & & & & 2b & & & = & 4 \\
 IX & & & & b & & & = & 2 \\
 \hline
 X & & 5 \cdot (-3) & & & + & 3c & = & -3 \\
 XI & & & & & & 3c & = & 12 \\
 XII & & & & & & c & = & 4
 \end{array}$$

Somit läßt v sich schreiben als $v = -3f_1 + 2f_2 + 4f_3$, damit liegt es in $\mathbb{Q}[X]$, da alle Koeffizienten ganze Zahlen darstellen.

3.) Sei $V_n \subset \mathbb{Q}[X]$ der $\mathbb{Q}$ -Vektorraum aller Polynome in der Unbestimmten X über dem Körper $\mathbb{Q}$ vom Grad $\leq n$ und $W_n := \{f \in V_n \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Bestimmen Sie die Dimensionen dieser Vektorräume

Behauptung: Die Dimension von W_n ist $n - 1$.

Beweis: Per Induktion über n .

Induktionsanfang $A(1), A(2), A(3)$

1. Bei Polynomen ersten Grades gilt nur für $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$ auch $f(0) = f(1) = 0$. Er hat daher die Dimension 0.
2. Die Polynome, für welche $f(0) = f(1) = 0$ gilt, lassen sich schreiben als

$$\alpha(x+0) \cdot (x-1) \cdots$$

Da Polynome zweiten Grades maximal zwei Nullstellen besitzen können, so sind dies alle

$$\alpha \cdot (x+0) \cdot (x-1) = \alpha x^2 - \alpha x$$

als Tupel aufgeschrieben somit $\alpha \cdot (0, -1, 1)$. Damit ist die Dimension dieses Vektorraumes gleich 1.

3. Polynome dritten Grades, bei welchen $f(0) = f(1) = f(b) = 0$ gilt, lassen sich schreiben als

$$\alpha \cdot (x+0) \cdot (x-1) \cdot (x-b) = \alpha(x^2-x)(x-b) = \alpha x^3 - \alpha x^2 + \alpha b x^2 - \alpha b x$$

da b unabhängig von α gewählt wurde, läßt sich ein $\beta := \alpha b$ definieren, in Tupelschreibweise enthält W_3 somit alle Vektoren

$$\alpha \cdot (0, 0, -1, 1) + \beta \cdot (0, -1, 1, 0)$$

$(0, 0, -1, 1)$ und $(0, -1, 1, 0)$ sind linear unabhängig, damit hat dieser Vektorraum die Dimension 2.

Induktionsschritt $A(n) \implies A(n+1)$

Das Polynom vom Grade $n+1$ läßt sich schreiben als

$$\alpha(x+0) \cdot (x-1) \cdots (x-c)$$

wobei c die $n+1$ -te Nullstelle darstellt. Diese kann unabhängig von den vorhergehenden gewählt werden, damit kommt mit jedem Polynomgrad genau eine Dimension hinzu. Die Dimension von W_{n+1} ist somit n .

Die Dimension von W_n ist also $n-1$.

q.e.d.

4.) Zeigen Sie, dass jede endliche Teilfamilie der Familie der Funktionen $\left(\sin(nt)\right)_{n \in N}$ linear unabhängig ist.

Behauptung: Alle endlichen Teilfamilien der Familie der Funktionen $\left(\sin(nt)\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind linear unabhängig, da sich nur für $n := 0$ die Nullfunktion darstellen läßt; dann nämlich gilt $\sin(0 \cdot t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Per Induktion über die Anzahl der Teilfamilien f .

Induktionsanfang $A(2)$

$$f := 2$$

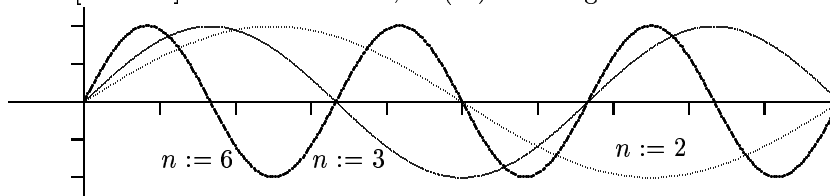
Die Linearkombination zweier Teilfamilien sei

$$\alpha \sin(nt) + \beta \sin(mt), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Die Sinusfunktion hat bei ganzzahligen Vielfachen von π Nullstellen. Für zwei Funktionen $\sin(mt)$ und $\sin(nt)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m < n$ existiert bei $t = \pi \cdot m \cdot n$ eine Nullstelle. Somit gilt dort

$$\alpha \sin(nt) + \beta \sin(mt) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Sei aber nun ohne Einschränkung $m < n$; so besitzt $\sin(mt)$ im Intervall $[0 : mn\pi]$ nur m Nullstellen, $\sin(nt)$ allerdings n Stück.



Wegen $m < n$ existieren somit Werte für t , an denen nur für $\beta := 0$ das Ergebnis der Linearkombination gleich 0 ist. Damit muß auch $\alpha := 0$ gelten, damit $\alpha \sin(nt) + \beta \sin(mt) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ gilt.

Somit läßt sich die Nullfunktion nur trivial ausdrücken, somit sind $\sin(nt)$ und $\sin(mt)$ linear unabhängig.

Induktionsschritt $A(f) \implies A(f+1)$

Bildet man als Linearkombination die endliche Summe

$$\sum_{i=1}^f \alpha_n \sin(n_i t) = x$$

so ist jede Komponente per I.V. linear unabhängig von einer Teilfamilie $\sin(mt)$ mit $m \neq n_i$. Damit kann x keine Teilfamilie von $\left(\sin(nt)\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sein, also läßt sich keine Teilfamilie durch eine endliche Summe durch die anderen Teilfamilien ausdrücken. Somit wurde die Behauptung bewiesen.

q.e.d.