

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 7

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{Q}^n$ seien linear unabhängig. Zeigen Sie, dass die Familie $(u + v - 2w, u - v - w, u + w)$ linear unabhängig, und die Familie $(u + v - 3w, u + 3v - w, v + w)$ linear abhängig ist.

a.)

Damit die Familie $(u + v - 2w, u - v - w, u + w)$ linear unabhängig ist, darf bei einer Linearkombination der Linearkombinationen

$$\alpha(u + v - 2w) + \beta(u - v - w) + \gamma(u + w)$$

nur mit der trivialen Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ der Nullvektor ausgedrückt werden können:

$$\begin{array}{rcllcl} I & & 1\alpha & + & 1\beta & + & 1\gamma & = & 0 \\ II & & 1\alpha & - & 1\beta & + & 0\gamma & = & 0 \\ III & & -2\alpha & - & 1\beta & + & 1\gamma & = & 0 \\ \hline IV & III - I & -3\alpha & - & 2\beta & & & = & 0 \\ V & IV - 2II & -5\alpha & & & & & = & 0 \end{array}$$

Somit kann nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ der Nullvektor ausgedrückt werden, somit ist die Familie unabhängig.

b.)

Die Familie $(u + v - 3w, u + 3v - w, v + w)$ ist nicht linear unabhängig, da die Linearkombination $(u + 2v - w)$ durch die beiden anderen ausgedrückt werden kann:

$$(u + v - 3w) + 2 \cdot (v + w) = u + 2v - w$$

2.) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraumes von $\mathbb{Q}^5$, der von den Vektoren $u_1 = (1, 2, -2, 2, -1)^T$, $u_2 := (1, 2, -1, 3, -2)^T$, $u_3 := (2, 4, -7, 1, 1)^T$, $u_4 := (1, 2, -5, -1, 2)^T$, $u_5 := (1, 2, -3, 1, 0)^T$ aufgespannt wird.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Somit besteht die Basis aus den Vektoren $v_1 := (1, 2, -2, 2, -1)^T$, $v_2 := (0, 0, 1, 1, -1)^T$.

Damit ist $q_1 = 1v_1 + 0v_2$, $q_2 = 1v_1 + 1v_2$, $q_3 = 2v_1 - 3v_2$, $q_4 = 1v_1 - 3v_2$,
und $q_5 = 1v_1 - 1v_2$

3.) Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $B :=$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D := (-1, 2, 0, 8), \quad E :=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Berechnen Sie alle möglichen Produkte.}$$

a.)

Mit A lassen sich die Matrizen A , B und E multiplizieren:

$$\begin{aligned}
 AA &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 8 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 5 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 7 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 8 \cdot 3 - 7 \cdot 8 & 1 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -17 \\ 5 & 49 & -20 \\ -6 & -33 & 91 \end{pmatrix} \\
 AB &= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 & 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 7 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot 1 & 1 \cdot 0 - 8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$AE = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 4 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 6 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \\ 1 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 7 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 8 \cdot 5 - 7 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ -41 & -12 \end{pmatrix}$$

b.)

Mit B lässt sich nur die Matrix C multiplizieren:

$$BC = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 8 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

c.)

Mit C lässt sich nur die Matrix D multiplizieren:

$$CD = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 8 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 8 \\ -8 \cdot 1 & 8 \cdot 2 & 8 \cdot 0 & 8 \cdot 8 \\ 7 \cdot 1 & -7 \cdot 2 & 7 \cdot 0 & -7 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix}$$

d.)

Mit D lässt sich nur die Matrix C multiplizieren:

$$DC = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 8 - 8 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 \end{pmatrix}$$

e.)

Mit E lässt sich keine Matrix multiplizieren:

4.) Eine reelle 3×3 -Matrix heißt ein „magisches Quadrat“, wenn alle Zeilensummen, alle Spaltensummen, alle Diagonalsummen gleich sind. Fasse die Menge M aller magischen Quadrate als Teilmenge des $\mathbb{R}^9$ auf. Zeigen Sie, dass M ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^9$ ist und geben Sie eine Basis an.

Man kann ein magisches Quadrat

a	b	c
d	e	f
g	h	i

als lineares Gleichungssystem auffassen bei dem die folgenden Gleichungen erfüllt sein müssen:

Zeilensummen

$$a + b + c = x$$

$$d + e + f = x$$

$$g + h + i = x$$

Spaltensummen

$$a + d + g = x$$

$$b + e + h = x$$

$$c + f + i = x$$

Diagonalen

$$a + e + i = x$$

$$c + e + g = x$$

wobei x die gewünschte Summe darstellt.

<i>I</i>		1a	+1b	+1c	+0d	+0e	+0f	+0g	+0h	+0i = x
<i>II</i>		0a	+0b	+0c	+1d	+1e	+1f	+0g	+0h	+0i = x
<i>III</i>		0a	+0b	+0c	+0d	+0e	+0f	+1g	+1h	+1i = x
<i>IV</i>		1a	+0b	+0c	+1d	+0e	+0f	+1g	+0h	+0i = x
<i>V</i>		0a	+1b	+0c	+0d	+1e	+0f	+0g	+1h	+0i = x
<i>VI</i>		0a	+0b	+1c	+0d	+0e	+1f	+0g	+0h	+1i = x
<i>VII</i>		1a	+0b	+0c	+0d	+1e	+0f	+0g	+0h	+1i = x
<i>VIII</i>		0a	+0b	+1c	+0d	+1e	+0f	+1g	+0h	+0i = x
<i>I</i>		1a	+1b	+1c	+0d	+0e	+0f	+0g	+0h	+0i = x
<i>II</i>		0a	+0b	+0c	+1d	+1e	+1f	+0g	+0h	+0i = x
<i>III</i>		0a	+0b	+0c	+0d	+0e	+0f	+1g	+1h	+1i = x
<i>IX</i>	<i>IV - I</i>	0a	-1b	-1c	+1d	+0e	+0f	+1g	+0h	+0i = 0
<i>V</i>		0a	+1b	+0c	+0d	+1e	+0f	+0g	+1h	+0i = x
<i>VI</i>		0a	+0b	+1c	+0d	+0e	+1f	+0g	+0h	+1i = x
<i>X</i>	<i>VII - I</i>	0a	-1b	-1c	+0d	+1e	+0f	+0g	+0h	+1i = 0
<i>VIII</i>		0a	+0b	+1c	+0d	+1e	+0f	+1g	+0h	+0i = x
<i>I</i>		1a	+1b	+1c	+0d	+0e	+0f	+0g	+0h	+0i = x
<i>V</i>		0a	+1b	+0c	+0d	+1e	+0f	+0g	+1h	+0i = x
<i>VI</i>		0a	+0b	+1c	+0d	+0e	+1f	+0g	+0h	+1i = x
<i>IX</i>		0a	-1b	-1c	+1d	+0e	+0f	+1g	+0h	+0i = 0
<i>II</i>		0a	+0b	+0c	+1d	+1e	+1f	+0g	+0h	+0i = x
<i>III</i>		0a	+0b	+0c	+0d	+0e	+0f	+1g	+1h	+1i = x
<i>X</i>		0a	-1b	-1c	+0d	+1e	+0f	+0g	+0h	+1i = 0
<i>VIII</i>		0a	+0b	+1c	+0d	+1e	+0f	+1g	+0h	+0i = x

<i>I</i>		1 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>V</i>		0 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>VI</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XI</i>	<i>IX + V</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	-1 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>II</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>III</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XII</i>	<i>X + V</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	-1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+2 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>VIII</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>I</i>		1 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>V</i>		0 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>VI</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XIII</i>	<i>XI + VI</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>II</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>III</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XIV</i>	<i>XII + VI</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+2 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+2 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>XV</i>	<i>VIII - VI</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	-1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	-1 <i>i</i> = 0
<i>I</i>		1 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>V</i>		0 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>VI</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XIII</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>XVI</i>	<i>II - XIII</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	-1 <i>g</i>	-1 <i>h</i>	-1 <i>i</i> = - <i>x</i>
<i>III</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XIV</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+2 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+2 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>XV</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	-1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	-1 <i>i</i> = 0
<i>I</i>		1 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>V</i>		0 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>VI</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XIII</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>XV</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	-1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	-1 <i>i</i> = 0
<i>III</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XVII</i>	<i>XIV - 2XV</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+3 <i>f</i>	-2 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+4 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>XVI</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	-1 <i>g</i>	-1 <i>h</i>	-1 <i>i</i> = - <i>x</i>
<i>I</i>		1 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>V</i>		0 <i>a</i>	+1 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>VI</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+1 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XIII</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+1 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	+1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>XV</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+1 <i>e</i>	-1 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	-1 <i>i</i> = 0
<i>XVII</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+3 <i>f</i>	-2 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+4 <i>i</i> = 2 <i>x</i>
<i>III</i>		0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+1 <i>g</i>	+1 <i>h</i>	+1 <i>i</i> = <i>x</i>
<i>XVIII</i>	<i>XVI + III</i>	0 <i>a</i>	+0 <i>b</i>	+0 <i>c</i>	+0 <i>d</i>	+0 <i>e</i>	+0 <i>f</i>	+0 <i>g</i>	+0 <i>h</i>	+0 <i>i</i> = 0

Mit $g + h + i = x$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 3f &= 2x + 2g - 1h - 4i \\
 \Leftrightarrow f &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}g - \frac{1}{3}h - \frac{4}{3}i
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{4}{3}g + \frac{1}{3}h - \frac{2}{3}i$$

$$e = f - g + i$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{4}{3}g + \frac{1}{3}h - \frac{2}{3}i - g + i$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{1}{3}g + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}i$$

$$d = 2x - e - f - g - h - i$$

$$\Leftrightarrow d = 2g + 2h + 2i - \frac{1}{3}g - \frac{1}{3}h - \frac{1}{3}i - \frac{4}{3}g - \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}i - g - h - i$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{2}{3}g + \frac{1}{3}h + \frac{4}{3}i$$

$$c = x - f - i$$

$$\Leftrightarrow c = g + h + i - \frac{4}{3}g - \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}i - i$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}g + \frac{2}{3}h + \frac{2}{3}i$$

$$b = x - e - h$$

$$\Leftrightarrow b = g + h + i - \frac{1}{3}g - \frac{1}{3}h - \frac{1}{3}i - h$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2}{3}g - \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}i$$

$$a = x - b - c$$

$$\Leftrightarrow a = g + h + i - \frac{2}{3}g + \frac{1}{3}h - \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}g - \frac{2}{3}h - \frac{2}{3}i$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{3}g + \frac{2}{3}h - \frac{1}{3}i$$

Dies lässt sich auch in Tupelschreibweise ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die drei letzten Elemente nur in je einem Vektor eine 1 enthalten und in den anderen beiden jeweils eine 0, so ist nur durch die triviale Lösung $g = h = i = 0$

der Nullvektor darstellbar. Damit sind sie linear unabhängig.

Somit sind $q_1 := (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0, 0)$, $q_2 := (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, 0)$, $q_3 := (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, 1)$ diejenigen Vektoren, die einen dreidimensionalen Untervektorraum im $\mathbb{R}^9$ aufspannen.