

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 8

Agnieszka Słaby, 5498566

Beth Scorer, 5643272

Bibiana Gluski, 5600816

Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Es bezeichne $\bar{x}$ die zu $x \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass die Menge aller Matrizen $\begin{pmatrix} x & -y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{C}$ bezüglich der Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation alle Axiome eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation erfüllen.

Sei $\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C} \right\}$ die Menge der Matrizen, $A := \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix}$ drei Matrizen aus $\mathcal{M}$ (mit $a' = a + \alpha i$, $b' = b + \beta i$, $c' = c + \gamma i$, $d' = d + \delta i$, $l' = l + \lambda i$, $m' = m + \mu i$)

a.) Addition

Abgeschlossenheit Damit $(\mathcal{M}, +)$ abgeschlossen ist, muß für jede Kombination von $A, B \in \mathcal{M}$ gelten $(A + B) \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a + \alpha i & -b - \beta i \\ b - \beta i & a - \alpha i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c + \gamma i & -d - \delta i \\ d - \delta i & c - \gamma i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \alpha i + c + \gamma i & -b - \beta i - d - \delta i \\ b - \beta i + d - \delta i & a - \alpha i + c - \gamma i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c + (\alpha + \gamma)i & -(b + d) - (\beta + \delta)i \\ (b + d) - (\beta + \delta)i & (a + c) - (\alpha + \gamma)i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{M}$ bezüglich der Addition abgeschlossen.

Assoziativität Addition

$$\begin{aligned} [A + B] + C &= \left[\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' + c' & -b' - d' \\ \bar{b}' + \bar{d}' & \bar{a}' + \bar{c}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' + c' + l' & -b' - d' - m' \\ \bar{b}' + \bar{d}' + \bar{m}' & \bar{a}' + \bar{c}' + \bar{l}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + [B + C] &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c' + l' & -d' - m' \\ \bar{d}' + \bar{m}' & \bar{c}' + \bar{l}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' + c' + l' & -b' - d' - m' \\ \bar{d}' + \bar{d}' + \bar{m}' & \bar{a}' + \bar{c}' + \bar{l}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{M}, +)$ assoziativ.

Kommutativität Addition

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a' + c' & -b' - d' \\ \bar{b}' + \bar{d}' & \bar{a}' + \bar{c}' \end{pmatrix} \\
\\
B + A &= \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c' + a' & -d' - b' \\ \bar{d}' + \bar{b}' & \bar{c}' + \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' + c' & -b' - d' \\ \bar{b}' + \bar{d}' & \bar{a}' + \bar{c}' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{M}, +)$ kommutativ.

Neutrales Element Addition Das neutrale Element der Addition ist $N := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A + N &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a' + 0 & -b' + 0 \\ \bar{b}' + 0 & \bar{a}' + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = A
\end{aligned}$$

Da $(\mathcal{M}, +)$ kommutativ ist, ist N sowohl rechts- als auch linksneutral. Zudem ist $\mathcal{M}$ nicht leer.

Inverses Element Addition Das zu einem beliebigen Element A inverse Element A^{-1} ist

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} -a' & b' \\ -\bar{b}' & -\bar{a}' \end{pmatrix}$$

da dann

$$A^{-1} + A = \begin{pmatrix} -a' & b' \\ -\bar{b}' & -\bar{a}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a' + a' & b' - b' \\ -\bar{b}' + \bar{b}' & -\bar{a}' + \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

ergibt. Also existiert für jedes Element aus $\mathcal{M}$ ein additives Inverses. Da $(\mathcal{M}, +)$ kommutativ ist, ist A^{-1} sowohl rechts- als auch linksinvers.

b.) Multiplikation

Abgeschlossenheit Damit $(\mathcal{M}, \bullet)$ abgeschlossen ist, muß für jede Kombination von $A, B \in \mathcal{M}$ gelten $AB \in \mathcal{M}$

$$AB = \begin{pmatrix} a + \alpha i & -b - \beta i \\ b - \beta i & a - \alpha i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c + \gamma i & -d - \delta i \\ d - \delta i & c - \gamma i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} (a + \alpha i)(c + \gamma i) + (-b - \beta i)(d - \delta i) & (a + \alpha i)(-d - \delta i) + (-b - \beta i)(c - \gamma i) \\ (b - \beta i)(c + \gamma i) + (a - \alpha i)(d - \delta i) & (b - \beta i)(-d - \delta i) + (a - \alpha i)(c - \gamma i) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ac + a\gamma i + \alpha ci + \alpha\gamma i^2 - bd + b\delta i - \beta di + \beta\delta i^2 & -ad - a\delta i - \alpha di - \alpha\delta i^2 - bc + b\gamma i - \beta ci + \beta\gamma i^2 \\ bc + b\gamma i - \beta ci - \beta\gamma i^2 + ad - a\delta i - \alpha di + \alpha\delta i^2 & -bd + \beta di - b\delta i + \beta\delta i^2 + ac - a\gamma i - \alpha ci + \alpha\gamma i^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (ac - \alpha\gamma - bd - \beta\delta) + (a\gamma + \alpha c + b\delta - \beta d)i & -(ad - a\delta + bc + \beta\gamma) - (a\delta + \alpha d - b\gamma + \beta c)i \\ (ad - \alpha\delta + bc + \beta\gamma) - (a\delta + \alpha d - b\gamma + \beta c)i & (ac - \alpha\gamma - bd - \beta\delta) - (a\gamma + \alpha c + b\delta - \beta d)i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{M}, \bullet)$ abgeschlossen.

Assoziativität Multiplikation

$$\begin{aligned}
 [AB]C &= \left[\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c' - b'd' & -a'd' - b'c' \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{b}'c' & \bar{a}'c' - \bar{b}'d' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c'l' - b'd'l' - a'd'\bar{m}' - b'c'\bar{m}' & -a'c'm' + b'd'\bar{m}' - a'd'\bar{l}' - b'c'\bar{l}' \\ \bar{a}'\bar{d}'l' + \bar{b}'c'l' + \bar{a}'c'\bar{m}' - \bar{b}'d'\bar{m}' & -\bar{a}'\bar{d}'m' - \bar{b}'c'm' + \bar{a}'c'\bar{l}' - \bar{b}'d'\bar{l}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c'l' - a'd'\bar{m}' - b'c'\bar{m}' - b'd'l' & -a'c'm' - a'd'\bar{l}' - b'c'\bar{l}' + b'd'm' \\ \bar{a}'c'\bar{m}' + \bar{a}'d'l' + \bar{b}'c'l' - \bar{b}'d'm' & \bar{a}'c'\bar{l}' - \bar{a}'d'm' - \bar{b}'c'm' - \bar{b}'d'\bar{l}' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A[BC] &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c'l' - d'\bar{m}' & -c'm' - d'\bar{l}' \\ \bar{c}'\bar{m}' + \bar{d}'l' & \bar{c}'\bar{l}' - \bar{d}'m' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c'l' - a'd'\bar{m}' - b'c'\bar{m}' - b'd'l' & -a'c'm' - a'd'\bar{l}' - b'c'\bar{l}' + b'd'm' \\ \bar{b}'c'l' - \bar{b}'d'\bar{m}' + \bar{a}'c'\bar{m}' + \bar{a}'d'l' & -\bar{b}'c'm' - \bar{b}'d'\bar{l}' + \bar{a}'c'\bar{l}' - \bar{a}'d'm' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c'l' - a'd'\bar{m}' - b'c'\bar{m}' - b'd'l' & -a'c'm' - a'd'\bar{l}' - b'c'\bar{l}' + b'd'm' \\ \bar{a}'c'\bar{m}' + \bar{a}'d'l' + \bar{b}'c'l' - \bar{b}'d'm' & \bar{a}'c'\bar{l}' - \bar{a}'d'm' - \bar{b}'c'm' - \bar{b}'d'\bar{l}' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Somit ist $(\mathcal{M}, \bullet)$ assoziativ.

Kommutativität Multiplikation

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c' - b'd' & -a'd' - b'c' \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{b}'c' & \bar{a}'c' - \bar{b}'d' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c' - \bar{b}'d' & -\bar{a}'d' - b'c' \\ a'\bar{b}' + \bar{d}'\bar{c}' & \bar{a}'\bar{c}' - b'\bar{d}' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit ist $(M, \bullet)$ nicht kommutativ.

Neutrales Element Multiplikation Das neutrale Element der Multiplikation ist $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da $(M, \bullet)$ nicht kommutativ ist, muß gezeigt werden, daß es sowohl links- als auch rechtsneutral ist.

Linksneutrales Element

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1a' + 0\bar{b}' & 1(-b') + 0\bar{a}' \\ 0a' + 1\bar{b}' & 0(-b') + 1\bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Damit ist E in $(M, \bullet)$ linksneutral.

Rechtsneutrales Element

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'1 - b'0 & a'0 - b'1 \\ \bar{b}'1 + \bar{a}'0 & \bar{b}'0 + \bar{a}'1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Damit ist E in $(M, \bullet)$ rechtsneutral.

Somit existiert ein neutrales Element in $(M, \bullet)$.

Inverses Element Multiplikation Da $(M, \bullet)$ nicht kommutativ ist, muß ein links- und ein rechtsinverses Element $A^{-1} \in M$ gefunden werden, so daß $AA^{-1} = E$ und $A^{-1}A = E$ ergibt.

$$AB = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'c' - b'\bar{d}' & -a'\bar{d}' - b'\bar{c}' \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{b}'c' & \bar{a}'\bar{c}' - \bar{b}'d' \end{pmatrix}$$

Damit muß das folgende Lineare Gleichungssystem erfüllt sein

$$\begin{aligned} a'c' - b'\bar{d}' &= 1 \\ -a'\bar{d}' - b'\bar{c}' &= 0 \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{b}'c' &= 0 \\ \bar{a}'\bar{c}' - \bar{b}'d' &= 0 \end{aligned}$$

Für das rechtsinverse Element müssen somit geeignete c' und d' gefunden werden, für das linksinverse a' und b' .

Rechtsinverses Element

$$\begin{aligned} a'c' - b'\bar{d}' = 1 &\Leftrightarrow a'c' = 1 + b'\bar{d}' \\ &\Leftrightarrow c' = \frac{1 + b'\bar{d}'}{a'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}'\bar{d}' + \bar{b}'c' = 0 &\Leftrightarrow \bar{a}'\bar{d}' = -\bar{b}'c' \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}' = -\frac{\bar{b}'c'}{\bar{a}'} \\
 \Rightarrow \bar{d}' = -\frac{\bar{b}'\frac{1+b'd'}{\bar{a}'}}{\bar{a}'} &\Leftrightarrow \bar{d}' = -\frac{\bar{b}' + b'\bar{d}'}{\bar{a}'^2} \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}' = -\frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2} - \frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2}\bar{d}' \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}' + \frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2}\bar{d}' = -\frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2} \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}'\left(1 + \frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2}\right) = -\frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2} \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}'\left(\frac{\bar{a}'^2 + \bar{b}'}{\bar{a}'^2}\right) = -\frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2} \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}' = -\frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2} \cdot \frac{\bar{a}'^2}{\bar{a}'^2 + \bar{b}'} \\
 &\Leftrightarrow \bar{d}' = -\frac{\bar{b}'}{\bar{a}'^2 + \bar{b}'}
 \end{aligned}$$

Damit existiert ein rechtsinverses Element für Matrizen mit $a' \neq 0$ und $\bar{a}'^2 + \bar{b}' \neq 0$.

Links inverses Element

$$\begin{aligned}
 c'a' - d'\bar{b}' = 1 &\Leftrightarrow c'a' = 1 + d'\bar{b}' \\
 &\Leftrightarrow a' = \frac{1 + d'\bar{b}'}{c'} \\
 \bar{c}'\bar{b}' + \bar{d}'a' = 0 &\Leftrightarrow \bar{c}'\bar{b}' = -\bar{d}'a' \\
 &\Leftrightarrow \bar{b}' = -\frac{\bar{d}'a'}{\bar{c}'} \\
 \Rightarrow \bar{b}' = -\frac{\bar{d}'\frac{1+d'\bar{b}'}{c'}}{\bar{c}'} &\Leftrightarrow \bar{b}' = -\frac{\bar{d}' + d'\bar{b}'}{\bar{c}'^2} \\
 &\Leftrightarrow \bar{b}' = -\frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2} - \frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2}\bar{b}' \\
 &\Leftrightarrow \bar{b}' + \frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2}\bar{b}' = -\frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2} \\
 &\Leftrightarrow \bar{b}'\left(1 + \frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2}\right) = -\frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \bar{b}' \left(\frac{\bar{c}'^2 + \bar{d}'}{\bar{c}'^2} \right) = -\frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2} \\
&\Leftrightarrow \bar{b}' = -\frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2} \cdot \frac{\bar{c}'^2}{\bar{c}'^2 + \bar{d}'} \\
&\Leftrightarrow \bar{b}' = -\frac{\bar{d}'}{\bar{c}'^2 + \bar{d}'}
\end{aligned}$$

Damit existiert ein linksinverses Element für Matrizen mit $c' \neq 0$ und $\bar{c}'^2 + \bar{d}' \neq 0$.

Somit existieren inverse Element der Multiplikation in $\mathcal{M}$.

c.) Distributivität

Da $(\mathcal{M}, \bullet)$ nicht kommutativ ist, muß auf Rechts- und Linksdistributivität geprüft werden.

Linksdistributivität

$$\begin{aligned}
AB + AC &= \left[\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a'c' - b'\bar{d}' & -a'd' - b'\bar{c}' \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{b}'c' & \bar{a}'\bar{c}' - \bar{b}'d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'l' - b'\bar{m}' & -a'm' - b'\bar{l}' \\ \bar{a}'\bar{m}' + \bar{b}'l' & \bar{a}'\bar{l}' - \bar{b}'m' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a'c' + a'l' - b'\bar{d}' - b'\bar{m}' & -a'd' - a'm' - b'\bar{c}' - b'\bar{l}' \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{a}'\bar{m}' + \bar{b}'c' + \bar{b}'l' & \bar{a}'\bar{c}' + \bar{a}'\bar{l}' - \bar{b}'d' - \bar{b}'m' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A[B + C] &= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c' + l' & -d' - m' \\ \bar{d}' + \bar{m}' & \bar{c}' + \bar{l}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a'c' + a'l' - b'\bar{d}' - b'\bar{m}' & -a'd' - a'm' - b'\bar{c}' - b'\bar{l}' \\ \bar{a}'\bar{d}' + \bar{a}'\bar{m}' + \bar{b}'c' + \bar{b}'l' & \bar{a}'\bar{c}' + \bar{a}'\bar{l}' - \bar{b}'d' - \bar{b}'m' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{M}, \bullet, +)$ linksdistributiv.

Rechtsdistributivität

$$\begin{aligned}
BA + CA &= \left[\begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a'c' - \bar{b}'d' & -b'c' - \bar{a}'d' \\ a'\bar{d}' + \bar{b}'\bar{c}' & -b'\bar{d}' + \bar{a}'\bar{c}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'l' - \bar{b}'m' & -\bar{a}'m' - b'l' \\ a'\bar{m}' - \bar{b}'\bar{l}' & \bar{a}'\bar{l}' - b'\bar{m}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a'c' + a'l' - \bar{b}'d' - \bar{b}'m' & -\bar{a}'d' - \bar{a}'m' - b'c' - b'l' \\ a'\bar{d}' + a'\bar{m}' + \bar{b}'\bar{c}' - \bar{b}'\bar{l}' & \bar{a}'\bar{c}' + \bar{a}'\bar{l}' - b'\bar{d}' - b'\bar{m}' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [B + C]A &= \left[\begin{pmatrix} c' & -d' \\ \bar{d}' & \bar{c}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l' & -m' \\ \bar{m}' & \bar{l}' \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c' + l' & -d' - m' \\ \bar{d}' + \bar{m}' & \bar{c}' + \bar{l}' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a'c' + a'l' - \bar{b}'d' - \bar{b}'m' & -\bar{a}'d' - \bar{a}'m' - b'c' - b'l' \\ a'\bar{d}' + a'\bar{m}' + \bar{b}'\bar{c}' + \bar{b}'\bar{l}' & \bar{a}'\bar{c}' + \bar{a}'\bar{l}' - b'\bar{d}' - b'\bar{m}' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit ist $(M, \bullet, +)$ rechtsdistributiv.

Somit ist $(M, \bullet, +)$ distributiv.

Somit ist $(M, +, \bullet)$ ein Körper ohne Kommutativität.
q.e.d.

ufffff... Nicht nochmal so nen Scheiss, okay?

2.) Lösen Sie mit dem Gauss'schen Algorithmus das lineare

Gleichungssystem $Ax = y$ über $\mathbb{R}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 \\ 4 & 0 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Um $Ax = y$ zu lösen, schreibt man beide Matrizen in eine 5×4 -Matrix und formt diese in die obere Dreiecksmatrix um:

$$\begin{pmatrix} I & 4 & 4 & 2 & 6 & | & 2 \\ II & 2 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ III & 2 & 5 & -8 & 6 & | & -2 \\ IV & 4 & 0 & 14 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} II' = II - 0,5I \\ III' = III - 0,5I \\ IV' = IV - I \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I & 4 & 4 & 2 & 6 & | & 2 \\ II & 0 & -1 & 3 & -1 & | & 1 \\ III & 0 & 3 & -9 & 3 & | & -3 \\ IV & 0 & -4 & 12 & -4 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} III' = III + 3II \\ IV' = IV - 4II \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I & 4 & 4 & 2 & 6 & | & 2 \\ II & 0 & -1 & 3 & -1 & | & 1 \\ III & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} =: A'$$

Somit ist $A'x$ also das Lineare Gleichungssystem

$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2$$

$$\begin{aligned} 0x_1 - 1x_2 + 3x_3 - 1x_4 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Mit $x_3 = x_4 = 0$ ist somit

$$-1x_2 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

und damit auch

$$4x_1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{6}{4} = 1,5$$

Womit $x = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung wäre.

Und ganz allgemein

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 - 1x_4 &= 1 \Leftrightarrow x_2 = -1 + 3x_3 - x_4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2 - 4x_2 - 2x_3 - 6x_4}{4} = \frac{1}{2} + 1 - 3x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

damit wäre die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.) Seien $\sigma, \tau \in S_3$ die Permutationen von 3 Elementen gegeben durch $\sigma = (12)$, $\tau = (123)$ und $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

seien die linearen Abbildungen, die durch $f\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right) :=$

$\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_{\sigma(i)}$, $g\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right) := \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_{\tau(i)}$ gegeben sind (e_i seien die kanonischen Einheitsvektoren). Geben Sie Matrizen A, B

an, für die $f\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ und $g\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right) = B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

gilt.

Mit

$$\sigma := (12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau := (123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sind f, g somit

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) &= \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) &= \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_1 \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als A, B können also

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und als $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definiert werden, da dann die Matrizenmultiplikationen

$$\begin{aligned} A\alpha &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 \\ 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ B\alpha &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 \\ 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das gleiche Ergebnis wie $f(\alpha)$ und $g(\alpha)$ liefern,

4,) Ein Nahrungsmittel enthält Schadstoffe $S_1, \dots, S_5$, die bei der Produktion und Lagerung als Bestandteile von Pflanzenschutzmitteln auftreten, Auf einzelnen Stationen werden die folgenden Pflanzenschutzmittel benutzt:

Station	Mittel
1, Landwirt	A
2, Rohproduktlagerung	B
3, Veredelungsbetrieb	C
4, Grossist und Transport	D
5, Einzelhandel	E

Die folgende Tabelle gebe die prozentuale Zusammensetzung der Mittel $A, \dots, E$ wieder:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A	0,2	0,5	0	0,3	0
B	0,1	0,6	0,3	0	0
C	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2
D	0	0	0,1	0,4	0,5
E	0	0,1	0,3	0,3	0,3

Für das fertige Produkt ergibt die Nahrungsmittelanalyse die folgenden Werte in Gewichtseinheiten $\frac{S_1}{0,75} \frac{S_2}{2,25} \frac{S_3}{0,65} \frac{S_4}{1,60} \frac{S_5}{0,75}$, Ermitteln Sie, wieviel in Gewichtsanteilen die einzelnen Stationen zur Schadstoffbelastung beitragen,

Schon die alten Chinesen kannten den Gauss'schen Algorithmus und hielten ihn schriftlich in den neun Büchern der arithmetischen Technik (Chiu Chang Suan Shu, 300BC bis 200AC) fest; dort wurde er jedoch nicht zeilen-, sondern spaltenweise angewandt:

$$\left(\begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \\ 0,2 & 0,5 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ \hline 0,75 & 2,25 & 0,65 & 1,6 & 0,75 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} I' &= 5I \\ II' &= 2II \\ &\rightsquigarrow \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \\ 1 & 1 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 1,2 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ \hline 3,75 & 4,5 & 0,65 & 1,6 & 0,75 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 II' = II - 1I \\
 IV' = IV - 0,3I \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 I & II & III & IV & V \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0,7 & 0,3 & -0,15 & 0 \\
 0,5 & -0,1 & 0,2 & 0,15 & 0,2 \\
 0 & 0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\
 0 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\
 \hline
 3,75 & 0,75 & 0,65 & 0,475 & 0,75
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 III' = 7III \\
 IV' = 7IV \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 I & II & III & IV & V \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0,7 & 2,1 & -1,05 & 0 \\
 0,5 & -0,1 & 1,4 & 1,05 & 0,2 \\
 0 & 0 & 0,7 & 2,8 & 0,5 \\
 0 & 0,2 & 2,1 & 2,1 & 0,3 \\
 \hline
 3,75 & 0,75 & 4,55 & 3,325 & 0,75
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 III' = III - 3II \\
 IV' = IV + 1,5II \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 I & II & III & IV & V \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & -0,1 & 1,7 & 0,9 & 0,2 \\
 0 & 0 & 0,7 & 2,8 & 0,5 \\
 0 & 0,2 & 1,5 & 2,4 & 0,3 \\
 \hline
 3,75 & 0,75 & 2,3 & 4,45 & 0,75
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 IV' = 1,7IV \\
 V' = 1,7V \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 I & II & III & IV & V \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & -0,1 & 1,7 & 1,53 & 0,34 \\
 0 & 0 & 0,7 & 4,76 & 0,85 \\
 0 & 0,2 & 1,5 & 4,08 & 0,51 \\
 \hline
 3,75 & 0,75 & 2,3 & 7,565 & 1,275
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 IV' = IV - 0,9III \\
 V' = V - 0,2III \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 I & II & III & IV & V \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & -0,1 & 1,7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0,7 & 4,13 & 0,71 \\
 0 & 0,2 & 1,5 & 2,73 & 0,21 \\
 \hline
 3,75 & 0,75 & 2,3 & 5,495 & 0,815
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 V' = 4,13V \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 I & II & III & IV & V \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & -0,1 & 1,7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0,7 & 4,13 & 2,9323 \\
 0 & 0,2 & 1,5 & 2,73 & 0,8673 \\
 \hline
 3,75 & 0,75 & 2,3 & 5,495 & 3,36595
 \end{array} \right)$$

$$V' = \underset{\rightsquigarrow}{V} - 0,71IV \quad \left(\begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,1 & 1,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 4,13 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1,5 & 2,73 & -1,071 \\ \hline 3,75 & 0,75 & 2,3 & 5,495 & -0,5355 \end{array} \right)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} -1,071E &= -0,5355 \Leftrightarrow E = \frac{-0,5355}{-1,071} = 0,5 \\ 4,13D + 2,73E &= 5,495 \Leftrightarrow D = \frac{5,495 - 2,73 \cdot 0,5}{4,13} = 1 \\ 1,7C + 0,7D + 1,5E &= 2,3 \Leftrightarrow C = \frac{2,3 - 1,5 \cdot 0,5 - 0,7 \cdot 1}{1,7} = 0,5 \\ 0,7B - 0,1C + 0D + 0,2E &= 0,75 \Leftrightarrow B = \frac{0,75 - 0,2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5}{0,7} = 1 \\ 1A + 0,5B + 0,5C + 0D + 0E &= 3,75 \Leftrightarrow A = \frac{3,75 - 0,5 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 1}{1} = 3 \end{aligned}$$

Also kommen beim Landwirt 3 Gewichtsanteile der Schadstoffe, bei der Rohproduktlagerung 0,1, beim Veredelungsbetrieb 0,5, beim Grossist und Transport 1, und beim Einzelhandel 0,5 hinzu.