

Übungsaufgaben Lineare Algebra I

Blatt 9

Agnieszka Słaby, 5498566
Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

6. April 2004

1.) Berechnen Sie die $n \times n$ -Matrizen $(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ij})(E_n - 2E_{jj})$, $(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ij})(E_n - 2E_{jj})(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ji})(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ji})$

$$E_n - 2E_{jj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_n + E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (E_n - 2E_{jj} + E_{ij})$$

$$((E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ij}))(E_n - 2E_{jj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (E_n - E_{ij})$$

$$E_n + E_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ij})(E_n - 2E_{jj})(E_n + E_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (E_n + E_{ji} - E_{ij}) \\
 (E_n + E_{ji} - E_{ij})(E_n - 2E_{jj}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \cdots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (E_n + E_{ji} + E_{ij} - 2E_{jj}) \\
 (E_n + E_{ji} + E_{ij} - 2E_{jj})(E_n + E_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})
 \end{aligned}$$

2.) Seien $S := \{(a_{ij}) \in M(n \times n, K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } j \neq 1\}$ und $Z := \{(a_{ij}) \in M(n \times n, K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq 1\}$. Zeigen Sie, dass $AB \in \mathcal{S}, CA \in \mathcal{Z} \forall A \in M(n \times n, K), B \in \mathcal{S}, C \in \mathcal{Z}$.

3.) Sie die folgenden Matrizen invertierbar? Wenn ja, dann geben Sie die inverse Matrix an

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

Um die Matrix in die Einheitsmatrix zu überführen sind folgende Operationen nötig:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \\
 &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \\
 &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Damit existiert eine inverse Matrix.

$$\text{b.) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

Der erste Umwandlungsschritt entspricht noch dem aus Aufgabe a.).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Da die Matrix in einem Restklassenring liegt, gilt dann aber

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist es nicht möglich, die Matrix in die Einheitsmatrix umzuwandeln, daher gibt es keine Inverse.

4.) Seien $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times r, K)$. Es gilt $\text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) - n \leq \text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}$. Geben Sie Beispiel an, für die jeweils das Gleichheitszeichen steht.